Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

KÖN·PR·REGIERUNG ZU POTSDAM

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Zwei und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Berlin, 1846.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

GENERAL LIBRARY

Inhaltsverzeichnifs
des zwei und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Théorèmes généraux sur les dérivées d'un ordre quelconque, de certaines fonctions très générales. Par Mr. *O. Schlömilch*, docteur es-sciences et lecteur des mathématiques à l'université de Jena.	I.	1
2.	Über den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$ für beliebige imaginäre Werthe von A und B annimmt. Von Herrn Prof. Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	I.	8
4.	Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein* zu Berlin. (Fortsetzung der Abhandlung Nr. 14. Band 30. Heft 3.)		
III.	Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln.	I.	59
5.	Notiz über Partialbrüche. Von Herrn *G. Eisenstein*, Dr. phil. zu Berlin.	I.	71
9.	Eine Bemerkung zur Zahlentheorie. Von Herrn Prof. Dr. *Stern* zu Göttingen.	I.	89
11.	Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. Von Herrn Oberlehrer Dr. *Schönemann* am Gymnasio zu Brandenburg an der Havel. (Fortsetzung und Schlufs der Abhandlung No. 22. im vorigen Bande.) . .	II.	93
13.	Sur quelques propriétés des déterminants gauches. Par Mr. *A. Cayley* de Cambridge.	II.	119
15.	Beweis des Satzes, dafs jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	II.	164
16.	Extrait d'une lettre adressée à M. *Hermite*, par M. *C. G. J. Jacobi*. . .	II.	176
18.	Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höhern Transcendenten. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	III.	185
19.	Über einige der Binominalreihe analoge Reihen. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	III.	197
20.	Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche. Auszug eines Schreibens des Herrn Dr. *E. Heine*, Privatdocenten zu Bonn, an den Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* in Berlin.	III.	205
21.	Über die Reihe $1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2+\ldots$ Aus einem Schreiben des Herrn Dr. *Heine* zu Bonn an den Herrn Professor *Lejeune Dirichlet*.	III.	210
22.	Über die Reduction des Integrals $\int \frac{fx\,dx}{\sqrt{\pm(1-x^8)}}$ auf elliptische Integrale. Von Herrn Prof. *F. Richelot* zu Königsberg.	III.	213

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
23.	Beweis eines Satzes über elliptische Functionen. Von Herrn Professor *F. Richelot* zu Königsberg.	III.	219
24.	Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	III.	220
27.	Extraits de deux lettres de M. *Charles Hermite* à M. *C. G. J. Jacobi.*	IV.	277
31.	De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae. Auct. *E. E. Kummer,* prof. math. Vratislaviae.	IV.	341
32.	Développement d'une formule qui donne en même temps les nombres de *Bernoulli* et les coëfficients de la série qui exprime la sécante. Par Mr. *O. Schlömilch,* prof. à l'université de Jena.	IV.	360
	2. Geometrie.		
6.	Über Lehrsätze, von welchen die bekannten Sätze über parallele Curven besondere Fälle sind. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin. (Auszug aus einer am 26. März in der hiesigen Akad. der Wiss. gehaltenen Vorlesung.)	I.	75
7.	Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène. Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet* à Berlin.	I.	80
10.	Zur näherungsweisen Kreis-Quadratur.	I.	91
17.	Geometrische Lehrsätze. Von Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin. (Auszug aus einer am 27. Nov. 1845 in der Akad. der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.)	II.	182
28.	Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.	IV.	300
29.	Über das dem Kreise umgeschriebene Viereck. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.	IV.	305
	3. Mechanik.		
8.	Über die Stabilität des Gleichgewichts. Von Herrn Prof. *G. Lejeune Dirichlet* zu Berlin. (Auszug aus einer am 22. Januar 1846 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung.)	I.	85
25.	Neue Eigenschaft zweier Kräfte, durch welche ein Kräftensystem ersetzt werden kann. Von dem Herrn Geh. Hofrath und Professor Dr. *Schweins* zu Heidelberg.	III.	227
	II. Angewandte Mathematik.		
3.	Mémoire sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer. Une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits. Par l'éditeur.	I.	14
14.	Suite de ce mémoire.	II.	124
26.	Suite de ce mémoire.	III.	231
30.	Fin de ce mémoire.	IV.	311
12.	Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facilis evolutio. Auct. *Aug. Ferd. Möbius,* Prof. ord. Lipsiae.	II.	106
Fac simile einer Handschrift von *Maupertuis.*		I.	
– – – – – – *W. J. G. Karsten.*		II.	
– – – – – – *Schröter.*		III.	
– – – – – – *J. Newton.*		IV.	

1.

Théorèmes généraux sur les dérivées d'un ordre quelconque de certaines fonctions très générales.

(Par Mr. *O. Schlömilch,* docteur es-sciences et lecteur des mathématiques à l'université de Jena.)

On s'est beaucoup occupé du calcul des dérivées successives des fonctions d'une seule variable, mais jusqu'ici on n'est parvenu à embrasser sous un seul point de vue les résultats hétérogènes du calcul. Ayant trouvé quelques théorèmes *généraux* sur les dérivées successives de quelques fonctions, je prends la permission de les présenter ici, pour remplir par là une lacune du calcul différentiel.

I.

Soit $f(y)$ une fonction, dont les dérivées successives $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$ etc. peuvent être dévéloppées par les méthodes ordinaires; soit de plus λ une quantité arbitraire et constante, je dis, que l'on pourra exprimer $\frac{d^n f(x^\lambda)}{\partial x^n} = D^n f(x^\lambda)$ au moyen des quantités $f'(y)$, $f''(y)$ etc., en y substituant x^λ au lieu de y. En effet, par des différentiations successives on parviendra aisément aux équations suivantes:

$$D f(x^\lambda) = \lambda x^{\lambda-1} f'(x^\lambda),$$
$$D^2 f(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} f'(x^\lambda) + \lambda^2 x^{2\lambda-2} f''(x^\lambda),$$
$$D^3 f(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) x^{\lambda-3} f'(x^\lambda) + 3\lambda^2(\lambda-1) x^{2\lambda-3} f''(x^\lambda) + \lambda^3 x^{3\lambda-3} f'''(x^\lambda)$$
etc.

Il suit de là que la dérivée $D^n f(x^\lambda)$ aura la forme

$$D^n f(x^\lambda) = \overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n} f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n} f''(x^\lambda) + \overset{n}{A}_3 x^{3\lambda-n} f'''(x^\lambda) + \cdots$$
$$\cdots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n} f^{(n)}(x^\lambda),$$

ou bien celle-ci:

$$1. \quad D^n f(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \cdots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\},$$

en désignant par

$$\overset{n}{A}_1, \quad \overset{n}{A}_2, \quad \overset{n}{A}_3, \quad \ldots \quad \overset{n}{A}_n$$

certains coëfficients dont la loi de formation sera à déterminer.

On y parvient sans peine, en observant, que ces coëfficients ne dépendent que des nombres λ, n et de l'indice, quelle que soit la nature de la fonction f. Supposons donc que la fonction $f(y)$ soit dévéloppable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable y, on aura

$$2. \quad f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

Cela donne, en différentiant p fois de suite,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(y) = {} & p(p-1)(p-2)\cdots 2\cdot 1\cdot a_p \\ & + (p+1)p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot a_{p+1} y \\ & + (p+2)(p+1)p\cdots 4\cdot 3\cdot a_{p+2} y^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et en posant, pour abréger

$$3. \quad \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-m+1) = \overset{m}{[\mu]}:$$

$$f^{(p)}(y) = \overset{p}{[p]} a_p + \overset{p}{[p+1]} a_{p+1} y + \overset{p}{[p+2]} a_{p+2} y^2 + \cdots,$$

par conséquent

$$4. \quad f^{(p)}(x^\lambda) = \overset{p}{[p]} a_p + \overset{p}{[p+1]} a_{p+1} x^\lambda + \overset{p}{[p+2]} a_{p+2} x^{2\lambda} + \cdots$$

D'un autre côté nous aurons en vertu de l'équation (2.):

$$f(x^\lambda) = a_0 + a_1 x^\lambda + a_2 x^{2\lambda} + a_3 x^{3\lambda} + \cdots$$

et par des différentiations n fois répétées:

$$D^n f(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\{\overset{n}{[\lambda]} a_1 x^\lambda + \overset{n}{[2\lambda]} a_2 x^{2\lambda} + \overset{n}{[3\lambda]} a_3 x^{3\lambda} + \cdots\}.$$

Substituant maintenant dans l'équation (1.) cette valeur particulière de $D^n f(x^\lambda)$, et ce que donne la formule (4.) pour $p = 1, 2, \ldots n$, nous aurons

$$\begin{aligned} & \overset{n}{[\lambda]} a_1 x^\lambda + \overset{n}{[2\lambda]} a_2 x^{2\lambda} + \overset{n}{[3\lambda]} a_3 x^{3\lambda} + \cdots \\ = {} & \overset{n}{A}_1 x^\lambda \{\overset{1}{[1]} a_1 + \overset{1}{[2]} a_2 x^\lambda + \overset{1}{[3]} a_3 x^{2\lambda} + \cdots\} \\ & + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} \{\overset{2}{[2]} a_2 + \overset{2}{[3]} a_3 x^\lambda + \overset{2}{[4]} a_4 x^{2\lambda} + \cdots\} \\ & + \overset{n}{A}_3 x^{3\lambda} \{\overset{3}{[3]} a_3 + \overset{3}{[4]} a_4 x^\lambda + \overset{3}{[5]} a_5 x^{2\lambda} + \cdots\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En égalant entre eux les coëfficients des puissances égales de x^λ, et en se rappelant du sens du signe $[\overset{m}{\mu}]$, on aura sans peine les équations

$$\frac{[\lambda]^n}{1} = \overset{n}{A}_1,$$

$$\frac{[2\lambda]^n}{1\cdot 2} = \frac{1}{1}\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2,$$

$$\frac{[3\lambda]^n}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_3,$$

$$\frac{[4\lambda]^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1\cdot 2}\overset{n}{A}_2 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_4,$$

. . . . . .

$$\frac{[n\lambda]^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-2)}\overset{n}{A}_2 + \cdots + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_{n-1} + \overset{n}{A}_n.$$

Ces équations, dont le nombre est n, suffisent pour déterminer les n inconnues

$$\overset{n}{A}_1,\ \overset{n}{A}_2,\ \ldots\ \overset{n}{A}_n,$$

et en éliminant on trouvera que le coëfficient $\overset{n}{A}_p$ est donné par la formule

$$5.\quad \overset{n}{A}_p = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p}\left\{[p\lambda]^n - p_1[(p-1)\lambda]^n + p_2[(p-2)\lambda]^n - \ldots\right\}$$

en désignant par p_1, p_2, p_3 etc. les coëfficients

$$\frac{p}{1},\quad \frac{p(p-1)}{1\cdot 2},\quad \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\quad \text{etc.}$$

Comme suivant cette notation on a

$$[\overset{n}{\mu}] = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot\mu_n,$$

on pourra aussi écrire:

$$6.\quad \overset{n}{A}_p = \frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p}\left\{(p\lambda)_n - p_1((p-1)\lambda)_n + p_2((p-2)\lambda)_n - \cdots\right\}:$$

donc, en vertu des valeurs de A_1, A_2, ... A_n déterminées par cette formule, on aura généralement cette l'expression très simple:

$$7.\quad D^n f(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \cdots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\}.$$

II.

Les expressions du paragraphe précédent contiennent comme cas particuliers toutes les formules démontrées jusqu'ici pour les dérivées successives des fonctions algébriques. Pour faire voir cela, je vais devélopper quelques uns des résultats qu'on peut tirer des formules (5.) et (6.).

1) Supposons $f(y)=(a+y)^\mu$: alors la formule (6.) donne

$$D^n(a+x^\lambda)^\mu = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{\mu \overset{n}{A}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)+\mu(\mu-1)\overset{n}{A}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2+\cdots\right\},$$

ou bien, si nous posons

$$7.\quad \overset{n}{E}_1 = 1\cdot 2\cdots n\{(p\lambda)_n - p_1((p-1)\lambda)_n + p_2((p-2)\lambda)_n - \cdots\},$$

et par conséquent

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1\cdot 2\cdots p}\overset{n}{E}_p:$$

le résultat prendra la forme

$$8.\quad D^n(a+x^\lambda)^\mu = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{\mu_1\overset{n}{E}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)+\mu_2\overset{n}{E}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2+\cdots+\mu_n\overset{n}{E}_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\}:$$

résultat général et élégant.

2) Il y a plusieurs cas particuliers pour λ, où la série (6.), qui sert à la détermination de $\overset{n}{A}_p$, peut être *sommée*. Ces valeurs particulieres sont $\lambda=-1$, $\lambda=2$ et $\lambda=\frac{1}{2}$. Par un calcul facile on trouvera ce qui suit.

I. Pour $\lambda=-1$:

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^n\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots p}(n-1)_{p-1} = (-1)^n\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}n_p,$$

par conséquent

$$D^n f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdots(n-1)}{x^n}\left\{\frac{n_1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n_2}{1\cdot x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n_3}{1\cdot 2\cdot x^3}f'''\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{n_n}{1\cdot 2\cdots(n-1)x^n}f^n\left(\frac{1}{x}\right)\right\},$$

et en renversant l'ordre des termes:

$$9.\quad (-1)^n D^n f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{2n}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)\cdot n_1}{x^{2n-1}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)(n-2)\cdot n_2}{x^{2n-2}}f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot n_{n-1}}{x^{n+1}}f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

II. Pour $\lambda = 2$ on a

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots p} p_{n-p}\, 2^{2p-n}$$

et

$$D^n f(x^2) = \frac{1\cdot 2\cdots n}{(2x)^n}\left\{\frac{1_{n-1}}{1}(2x)^2 f'(x^2) + \frac{2_{n-2}}{1\cdot 2}(2x)^4 f''(x^2) + \cdots\right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(n-1)_1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(2x)^{2n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n_0}{1\cdot 2\cdots n}(2x)^{2n} f^{(n)}(x^2)\right\},$$

et en renversant l'ordre des termes:

$$D^n f(x^2) =$$
$$(2x)^n f^{(n)}(x^2) + n(n-1)_1 (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + n(n-1)\cdot(n-2)_2 (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \cdots,$$

ou ce qui est le même:

$$10.\quad D^n f(x^2) =$$
$$(2x)^n f^{(n)}(x^2) + 2\cdot n_2 (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + 3\cdot 4\cdot n_4 (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ 4\cdot 5\cdot 6\cdot n_6 (2x)^{n-6} f^{(n-3)}(x^2) + \cdots$$

En supposant par exemple $f(y) = (1-y)^{n-\frac{1}{2}}$, et en mettant $n-1$ au lieu de n, on tirera de ce théorème la belle formule suivante de Mr. *Jacobi:*

$$D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n-1} 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n} \sin(n \arccos x).$$

III. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on trouve

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^{n-p} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)} \cdot \frac{(2n-p-1)_{n-1}}{2^{2n-p}},$$

et par les valeurs de $\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots$ déterminées par cette formule:

$$D^n f(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{A}_1 x^{\frac{1}{2}} f'(x^{\frac{1}{2}}) + \overset{n}{A}_2 x^{\frac{2}{2}} f''(x^{\frac{1}{2}}) + \cdots + \overset{n}{A}_n x^{\frac{1}{2}n} f^{(n)}(x^{\frac{1}{2}})\right\}.$$

En renversant l'ordre des termes on aura

$$D^n f(x^{\frac{1}{2}}) = \overset{n}{A}_n \frac{f^{(n)}(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}n}} + \overset{n}{A}_{n-1} \frac{f^{(n-1)}(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}(n+1)}} + \overset{n}{A}_{n-2} \frac{f^{(n-2)}(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}(n+2)}} + \cdots$$

La forme des coëfficients est la suivante:

$$\overset{n}{A}_{n-q} = (-1)^q \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-q-1)} \cdot \frac{(n+q-1)_{n-1}}{2^{n+q}}$$
$$= \frac{(-1)^q}{2^n}(n-q)(n-q+1)\cdots(n-1)\cdot\frac{(n+q-1)_q}{2^q}$$
$$= \frac{(-1)^q}{2^n}\cdot\frac{(n+q-1)(n+q-2)\cdots(n-q)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2q)};$$

donc nous avons l'expression également remarquable:

$$11.\quad D^n f(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2^n}\left\{\frac{f^{(n)}(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}n}} - \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{f^{(n-1)}(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}(n+1)}} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4}\cdot\frac{f^{(n-2)}(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}(n+2)}} - \cdots\right\}.$$

III.

Par un calcul analogue à celui de la première partie, on trouvera aisément, que les dérivées successives de la fonction $f(e^x)$ peuvent être exprimées au moyen des dérivées $f'(y)$, $f''(y)$ etc. en y mettant e^x au lieu de y. En effet, on a par des différentiations consécutives:

$$\begin{aligned} Df(e^x) &= e^x f'(e^x),\\ D^2 f(e^x) &= e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x),\\ D^3 f(e^x) &= e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x)\end{aligned}$$

etc.

et généralement

$$12.\quad D^n f(e^x) = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \cdots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x),$$

où il s'agit encore de la détermination des coëfficients $\overset{n}{A}_1$, $\overset{n}{A}_2$, ... $\overset{n}{A}_n$. Elle se fera en remarquant, que ces coëfficients ne dépendent pas de la nature de la fonction f. En supposant donc pour $f(y)$ la forme $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 +$ etc., on trouvera aisément (comme dans No. I.) n équations conditionnelles propres à la détermination des n inconnues. On en tire sans peine l'expression

$$13.\quad \overset{n}{A}_p = \frac{1}{1\cdot 2\cdots p}\left\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \cdots\right\}$$

qui présente la forme générale de tous les coëfficients et resout la seconde partie du problème.

Pour donner un exemple, soit $f(y) = (y+a)^\mu$; on aura dans ce cas

$$D^n (e^x + a)^\mu = (e^x + a)^\mu\left\{\mu \overset{n}{A}_1\left(\frac{e^x}{e^x+a}\right) + \mu(\mu-1)\overset{n}{A}_2\left(\frac{e^x}{e^x+a}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Soit pour abréger

$$14.\quad \overset{n}{K}_p = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \cdots,$$

et par conséquent

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}\overset{n}{K}_p :$$

le résultat trouvé ci-dessus prendra la forme très simple

$$15. \quad D^n(e^x+a)^\mu =$$

$$(e^x+a)^\mu\left\{\mu_1\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{e^x+a}\right)+\mu_2\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{e^x+a}\right)^2+\cdots+\mu_n\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{e^x+a}\right)^n\right\}.$$

Cette équation comprend comme cas particuliers toutes les formules données par ***Euler, Laplace*** et Autres pour les dérivées successives des expressions

$$\frac{1}{e^x+a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^x-a}.$$

Quant à d'autres conséquences, qui peuvent être tirées des formules générales, j'en donnerai quelques exemples dans un des cahiers prochains.

2.

Über den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$ für beliebige imaginäre Werthe von A und B annimmt.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

Ich will im Folgenden den Werth untersuchen, welchen das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$$

annimmt, wenn die Constanten A und B beliebige imaginäre Werthe haben, welche jedoch nicht so beschaffen sein dürfen, dafs die Function unter dem Integralzeichen für einen reellen Werth von φ unendlich werden kann. Wenn die Constanten A und B reell sind, ist bekanntlich die Bedingung $AA+BB<1$ erforderlich, damit der Ausdruck unter dem Integralzeichen für keinen reellen Werth des Winkels φ unendlich werden kann. Wenn man aber den Fall der Realität von A und B ausschliefst und

$$A = a + a'\sqrt{-1}, \qquad B = b + b'\sqrt{-1}$$

setzt, wo a, a', b, b' reell sind und a' und b' nicht beide gleichzeitig verschwinden, so kann für einen reellen Werth von φ der Ausdruck unter dem Integralzeichen nur unendlich werden oder der Nenner

$$1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi$$

verschwinden, wenn zu gleicher Zeit

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=1, \qquad a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=0$$

wird. Setzt man also

$$\cos\varphi = \frac{b'}{\sqrt{(a'a'+b'b')}}, \qquad \sin\varphi = \frac{-a'}{\sqrt{(a'a'+b'b')}},$$

so mufs

$$ab'-a'b = \sqrt{(a'a'+b'b')}$$

werden. Dies ist also die Bedingung, welche Statt finden mufs, damit für einen reellen Werth des Winkels φ der Nenner $1-A\cos\varphi-B\sin\varphi$ verschwinden

kann. Man kann dieselbe auch so darstellen:

$$aa'+bb' = \sqrt{(a'a'+b'b')}\cdot\sqrt{(aa+bb-1)}.$$

Schliefst man also den Fall aus, wo diese Gleichung zwischen den Constanten a, b etc. Statt findet, wie es nöthig ist, damit das zu betrachtende Integral nicht unendlich oder unbestimmt werde, so wird der absolute Werth der Gröfse $ab'-a'b$ entweder gröfser oder kleiner als $\sqrt{(a'a'+b'b')}$ sein. Ich will im Folgenden diese Gröfse mit

$$\Delta = ab'-a'b$$

bezeichnen und, was erlaubt ist, *positiv* annehmen. Wenn nämlich Δ nicht positiv ist, so kann man es leicht dazu machen, indem man blofs $2\pi-\varphi$ für φ setzt, wodurch die Gränzen der Integration und a und a' ungeändert bleiben, während gleichzeitig b und b' und also auch Δ das Zeichen ändern.

Ich bemerke zunächst folgende identische Gleichung:

$$\frac{1}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{1}{n-n'\sqrt{-1}}\left\{\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}+\frac{1}{1-C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}}-1\right\},$$

wo

$$n-n'\sqrt{-1} = \sqrt{(1-AA-BB)} = \sqrt{(1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2)},$$

ferner

$$C = \frac{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}{1+n-n'\sqrt{-1}} = \frac{A-B\sqrt{-1}}{1+\sqrt{(1-AA-BB)}},$$

$$C' = \frac{a-b'+(a'+b)\sqrt{-1}}{1+n-n'\sqrt{-1}} = \frac{A+B\sqrt{-1}}{1+\sqrt{(1-AA-BB)}}.$$

Das Zeichen der Wurzelgröfse, deren Werth durch $n-n'\sqrt{-1}$ ausgedrückt wird, ist willkürlich; ich werde annehmen, dafs es so bestimmt ist, *dafs ihr reeller Theil n einen positiven Werth erhält.*

Es ist jetzt zu untersuchen, ob die *Moduln* von C und C' gröfser oder kleiner als 1 sind, dieses Wort in dem Sinne von *Cauchy* genommen. Hiezu bemerke ich, dafs

$$CC' = \frac{1-n+n'\sqrt{-1}}{1+n-n'\sqrt{-1}};$$

es ist also das Product der Moduln von C und C',

$$\sqrt{\frac{(1-n)^2+n'n'}{(1+n)^2+n'n'}},$$

da n positiv angenommen worden, kleiner als 1. Mithin können nicht beide Moduln gleichzeitig gröfser als 1 sein, sondern der kleinere von beiden wird nothwendig < 1. Es sind aber die Moduln von C und C' respective die Gröfsen

$$\sqrt{\frac{aa+a'a'+bb+b'b'+2\Delta}{(1+n)^2+n'n'}}, \quad \sqrt{\frac{aa+a'a'+bb+b'b'-2\Delta}{(1+n)^2+n'n'}},$$

von denen, da Δ positiv angenommen worden, die letztere die kleinere ist, und es ist daher *der Modul von C' immer* < 1. Es handelt sich also nur noch darum, ob der Modul von C oder die erste der beiden vorstehenden Gröfsen gröfser oder kleiner als 1 ist. Man findet hierfür ein einfaches Criterium durch folgende Betrachtungen.

Das Product aus den Quadraten der Moduln von C und C' ist

$$\frac{(aa+a'a'+bb+b'b')^2-4\Delta\Delta}{(1+nn+n'n'+2n)^2} = \frac{1+nn+n'n'-2n}{1+nn+n'n'+2n}.$$

Es wird daher

$$(aa+a'a'+bb+b'b')^2-4\Delta\Delta = (1+nn+n'n')^2-4nn.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs je nachdem Δ kleiner oder gröfser als n ist, auch $aa+a'a'+bb+b'b'$ kleiner oder gröfser als $1+nn+n'n'$ und daher *a fortiori* auch $aa+a'a'+bb+b'b'+2\Delta$ kleiner oder gröfser als $1+nn+n'n'+2n$ ist. *Es wird daher der Modul von C kleiner oder gröfser als* 1, *je nachdem Δ kleiner oder gröfser als n ist.*

Da $(n-n'\sqrt{-1})^2 = 1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2$, so werden die Gröfsen n und n' durch die beiden folgenden Gleichungen bestimmt:

$$nn-n'n' = 1-aa+a'a'-bb+b'b', \qquad nn' = aa'+bb'.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned}(\Delta\Delta+n'n')(\Delta\Delta-nn) &= \Delta^4+\Delta^2(aa+bb-a'a'-b'b')-(aa+bb)(a'a'+b'b') \\ &= (\Delta\Delta+aa+bb)(\Delta\Delta-a'a'-b'b').\end{aligned}$$

Man ersieht hieraus den Satz, dafs Δ kleiner oder gröfser als n oder $= n$ ist, je nachdem Δ kleiner oder gröfser als $\sqrt{(a'a'+b'b')}$ oder $= \sqrt{(a'a'+b'b')}$ ist. Das gefundne Criterium kann man daher so ausdrücken: *je nachdem $(ab'-a'b)^2$ kleiner oder gröfser als $a'a'+b'b'$, wird der Modul von C kleiner oder gröfser als* 1. Den Fall $\Delta = \sqrt{(a'a'+b'b')}$ haben wir oben ausgeschlossen.

Da der Modul von C' immer < 1, so wird

$$\frac{1}{1-C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}} = 1+C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C'^3e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

Es wird ferner, je nachdem der Modul von C gröfser oder kleiner als 1,

$$\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}-1 = Ce^{\varphi\sqrt{-1}}+C^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+C^3e^{3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}-1 = -\{1+C^{-1}e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C^{-2}e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C^{-3}e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}\}.$$

Je nachdem daher $(ab'-a'b)^2$ kleiner oder gröfser als $a'a'+b'b'$, mufs man, um eine convergirende Reihe zu haben, entweder

$$\frac{n-n'\sqrt{-1}}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= 1+Ce^{\varphi\sqrt{-1}}+C^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+C^3e^{3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$
$$+C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C'^3e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{n-n'\sqrt{-1}}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= (C'-C^{-1})e^{-\varphi\sqrt{-1}}+(C'^2-C^{-2})e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+(C'^3-C^{-3})e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

setzen. Man erhält hieraus folgende Sätze:

I. *Wenn a, a', b, b' beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit*

$$(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$$

erfüllen, so wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = 0,$$

und allgemein, wenn $ab'-a'b$ positiv ist, für jedes ganze positive i,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\varphi\cdot d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}.$$

II. *Wenn a, a', b, b' beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit*

$$(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$$

erfüllen, so wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\{1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2\}}},$$

wenn man die Wurzelgröfse so bestimmt, dafs ihr reeller Theil positiv wird.

Die Gröfse C^{-1} wird vermittelst des oben für CC' gegebnen Werthes,

$$C^{-1} = \frac{1+n-n'\sqrt{-1}}{1-n+n'\sqrt{-1}}\cdot C' = \frac{a-b'+(a'+b)\sqrt{-1}}{1-n+n'\sqrt{-1}}.$$

Es wird daher

$$\frac{C'-C^{-1}}{n-n'\sqrt{-1}} = \frac{-2(a-b'+(a'+b)\sqrt{-1})}{(a+a'\sqrt{-1})^2+(b+b'\sqrt{-1}-1)^2} = \frac{-2}{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}.$$

Man hat daher den Satz:

Wenn a, a', b, b' beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$ erfüllen und $ab'-a'b$ positiv ist, so wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1}-1)\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-(\alpha+a'\sqrt{-1}-1)\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1}-1)\sin\varphi}$$
$$= \frac{-2\pi}{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}.$$

Setzt man

$$a+b'+(a'-b)\sqrt{-1} = D,$$
$$a-b'+(a'+b)\sqrt{-1} = D',$$

so wird

$$n-n'\sqrt{-1} = \sqrt{(1-DD')}$$

und daher

$$C = \frac{D}{1+\sqrt{(1-DD')}} = \frac{1-\sqrt{(1-DD')}}{D'},$$
$$C' = \frac{D'}{1-\sqrt{(1-DD')}} = \frac{1-\sqrt{(1-DD')}}{D}.$$

Wendet man diese Ausdrücke an, so erhält man aus den oben gegebnen Reihenentwicklungen die folgenden allgemeinen Sätze.

IV. *Es seien a, a', b, b' beliebige reelle Gröfsen, welche jedoch nicht die Gleichung $(ab'-a'b)^2 = a'a'+b'b'$ erfüllen; es sei ferner $ab'-a'b$ positiv und*

$$a+b'+(a'-b)\sqrt{-1} = D, \qquad a-b'+(a'+b)\sqrt{-1} = D';$$

ist $(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$, so wird für ein ganzes positives i:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-DD')}}\cdot\frac{D^i+D'^i}{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i},$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-DD')}}\cdot\frac{D^i-D'^i}{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i};$$

wenn dagegen $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$ *ist, so wird für ein ganzes positives* i*:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= -\pi\frac{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i-\{1-\sqrt{(1-DD')}\}^i}{\sqrt{(1-DD')}\cdot D^i},$$

wo die Wurzelgröfse $\sqrt{(1-DD')}$ *immer so zu bestimmen ist, dafs ihr reeller Theil positiv wird.*

Man ersieht aus dem vorstehenden Theorem, dafs für den Fall, wo $(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$, genau dieselben Formeln als für reelle Werthe von A und B gelten; dafs dagegen für den andern Fall, wo $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$, ganz verschiedene Resultate Statt finden. Um diese Resultate unmittelbar durch die Gröfsen A und B darzustellen, braucht man in den vorstehenden Formeln nur die Werthe $D=A+B\sqrt{-1}$, $D'=A-B\sqrt{-1}$ zu substituiren. Giebt man dem Nenner durch Multiplication mit einer imaginären Constante die Form

$$\alpha+\alpha'\sqrt{-1}-(\beta+\beta'\sqrt{-1})\cos\varphi-(\gamma+\gamma'\sqrt{-1})\sin\varphi,$$

wo α, α', β etc. reell sind, so werden die beiden zu unterscheidenden Fälle die, wo $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2$ kleiner und wo es gröfser als $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2$ ist. Man wird also z. B. den Satz haben, dafs *wenn für reelle Gröfsen* α, α', β *etc. die Ungleichheit*

$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 > (\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2$$

Statt findet, das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha+\alpha'\sqrt{-1}-(\beta+\beta'\sqrt{-1})\cos\varphi-(\gamma+\gamma'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$

verschwindet.

Berl. d. 14. Febr. 1846.

3.

MÉMOIRE
sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer.

Une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits.

(Par l'éditeur.)

L'objet du présent mémoire, imprimé d'abord en allemand, dans le journal des constructions, que publie l'éditeur du présent journal, et puis aussi en français, pour le faire connaître également dans les pays étrangers, est, à la verité, purement technique; mais comme la plus grande partie du mémoire consiste en calculs, ça et là même assez compliqués, et que le sujet en lui-même est important, à l'ordre du jour au plus haut degré, et offre des applications intéressantes des principes de physique, de mécanique et de calcul, l'éditeur a jugé que cette partie du mémoire ne serait peut-être pas sans intérêt pour les lecteurs du présent journal, consacré aussi bien aux mathématiques appliquées qu'aux mathématiques pures. Il leur présente donc içi un *extrait* de ce mémoire, renfermant la partie spécialement théorique de l'ouvrage, n'en ayant conservé de la partie technique, que ce qui lui a paru indispensable, pour donner une idée exacte des objets auxquels la théorie a été appliquée.

Remarques générales sur les effets de l'élasticité de la vapeur d'eau, et de celle de l'air atmosphérique.

1.

La vapeur d'eau et l'air atmosphérique sont des fluides élastiques tous deux, et ils ont en commun la propriété de se dilater, et d'exercer contre des aires qui s'opposent à leur dilatation une pression qui, en général, est dans le rapport de la densité des deux fluides; sauf les modifications, que le degré de la température y porte. Et comme la densité peut être augmentée arbitrairement, la force expansive des deux fluides peut l'être également et dans les mêmes proportions.

C'est, comme on le sait, de la ***force expansive*** de la vapeur, que l'on se sert pour mettre en mouvement les machines dites à vapeur, destinées, soit à transporter des wagons chargés de fardeaux, soit à d'autres buts; et cela se fait ordinairement en introduisant la vapeur dans des cylindres fermés aux extrémités, pour qu'elle y pousse devant elle des pistons qui communiquent leur mouvement à la machine. Donc: l'air comprimé ayant en commun avec la vapeur la ***force expansive***, il faut que cet air puisse être employé de la même manière et au même but. L'effet sera nécessairement le même, et il n'y aura que cette différence, que l'élasticité de la vapeur est produite par l'élévation de la température, tandis que celle de l'air l'est par quelque force extérieure qui le comprime.

2.

En appliquant les forces expansives de la vapeur et de l'air pour mettre en mouvement des machines, un des avantages que présente l'emploi de la vapeur, consiste en ce que l'élasticité de la vapeur peut être produite par le feu encore dans les cas où les forces mécaniques, nécessaires pour comprimer l'air, manquent, ou lorsqu'elles ne peuvent être utilisées; par exemple sur les vaisseaux et les bateaux, bien que dans ces cas, il serait peut-être encore possible d'utiliser la force du vent en mer, et cette même force, combinée avec celle du courant d'eau, sur les fleuves, pour comprimer l'air et pour lui donner l'élasticité nécessaire pour mettre en mouvement quelque machine propulsive.

Mais, dans tous les autres cas, où l'on peut disposer des forces mécaniques pour comprimer l'air, ce fluide est préférable à la vapeur sous plus d'un rapport; en admettant d'ailleurs que les difficultés qui peuvent s'y présenter n'en rendent pas l'application trop difficile. Les préférences à donner à l'air sur la vapeur, spécialement dans son application aux chemins de fer, qui est l'objet de ce mémoire, sont les suivantes.

I. Ce n'est pas, comme pour la production de la vapeur, le *feu* exclusivement, qui peut servir comme force nécessaire à la compression de l'air. Toute autre force mécanique, comme par exemple celle des chûtes ou des courants d'eau, celle du vent, des bêtes de trait etc. est également applicable à ce but; et cette circonstance est très importante. Car la combustion consume et détruit complètement et irréparablement une matière précieuse, qui pourrait être utile et nécessaire à beaucoup d'autres buts, par exemple, au chauffage des habitations, à la cuisson des aliments etc. D'autre part, les matières com-

bustibles sont coûteuses, tandis que la force du vent par elle même ne coûte rien, la force des chûtes ou des courants d'eau souvent très peu, et que la force des animaux est en plusieurs localités moins chère que celle engendrée par la combustion.

II. Les machines mises en mouvement par le feu sont moins durables et d'une construction et d'un entretien plus coûteux que celles mises en mouvement par des forces mécaniques. Le feu détruit fortement les machines sur lesquelles il agit; et surtout dans le cas où ces machines ne sont pas stationnaires, mais locomotives, commes celles des chemins de fer.

III. Le danger presque inséparable du feu, offre un inconvénient bien plus grave encore, si les machines à feu doivent être locomotives. Dans ce cas, le danger n'existe pas seulement pour le voisinage des machines stationnaires, mais encore pour le voisinage de la voie à parcourir; et pour les personnes comme pour les marchandises que la machine transporte, le danger est imminent au plus haut degré. Si l'on fait usage de la force expansive de l'air, le danger d'être incendié n'existe plus du tout, ni pour les personnes, ni pour les marchandises transportées, et si la compression nécessaire de l'air est opérée par des machines à feu, qui alors peuvent être stationnaires, le danger n'existe plus que pour le voisinage des machines, et là il peut être aisément prévu et amoindri. A la vérité, un autre danger prend la place de celui du feu pour les locomotives, savoir, le danger que l'air comprimé puisse faire créver les réservoirs qui le renferment; mais nous verrons plus bas que ce danger n'est presque pas à redouter.

IV. L'abaissement de la température ne diminue que très-peu l'élasticité de l'air, mais beaucoup celle de la vapeur. Toutefois, dans le but d'empêcher l'effet du refroidissement, les machines à vapeur doivent être plus compliquées que celles à air.

V. Enfin l'air est absolument inépuisable; il est en présence partout et s'obtient sans frais. L'eau, pour en faire de la vapeur, l'est à la verité presque également; mais les matières combustibles ne sont ni inépuisables, ni gratuites, et la conservation et l'entretien des forêts, qui bientôt seront insuffisantes aux besoins toujours croissants des populations et de l'industrie, exigent de vastes terrains qui pourraient être plus utilement consacrés à l'exploitation des produits agricoles.

Donc il est clair, que l'application de l'élasticité de l'air, comme force motrice sur les chemins de fer, est bien préférable à celle de la force de la vapeur.

3.

En vertu des réflexions précédentes il est donc bien certain que la question de savoir, si l'élasticité de l'air peut être utilisée comme force motrice sur les chemins de fer, ne peut être décidée en elle-même qu'affirmativement. Il ne s'agit toutefois, pour le but proposé, que d'avoir une force suffisante, propre à pousser devant elle un piston dans l'intérieur d'un tube. Une telle force peut être donnée incontestablement à l'air atmosphérique, si on le comprime suffisamment; et il est évidemment indifférent, que ce soit la vapeur ou l'air qui donne cette force, tandis que dans la pratique, il est même plus facile de construire d'une manière durable un piston et un cylindre à air, qu'un piston et cylindre à vapeur. La question en elle-même de savoir, si l'élasticité de l'air peut être utilisée à la place de celle de la vapeur comme force motrice sur les chemins de fer, pourra donc être considérée comme *décidée* et affirmée. La contester, ne serait que mettre en doute des principes de physique établis et confirmés par l'expérience de plusieurs siècles.

Il ne s'agit que de rechercher, comment il sera techniquement possible de se servir de l'élasticité de l'air dans ce but, et de trouver les moyens les plus avantageux pour y parvenir.

A la première vue, l'application de la force motrice de l'élasticité de l'air parait offrir des grandes difficultés techniques; mais heureusement l'époque est passée, où quelque préjugé ait le droit de s'opposer à cette importante exploitation d'une force aussi puissante. ***L'expérience*** a déjà prouvé, que la force de l'air peut effectivement être utilisée comme force motrice sur les chemins de fer, de l'une au moins des différentes manières dont cela parait praticable. Le chemin de fer de Kingstown à Dalkey, près de Dublin, est en pleine exploitation, et là, l'élasticité de l'air atmosphérique est la force qui, agissant sur un piston dans un tube couché entre les rails le long de la voie, et dans lequel on raréfie l'air devant le piston, pousse ce piston qui tire après lui le train des wagons qui y sont attachés, avec une grande vitesse, et même toujours en gravissant une pente assez forte.

Or, cette manière d'utiliser l'élasticité de l'air comme force motrice est, comme on le fera voir, presque la moins convenable et la moins avantageuse de toutes, et les constructions destinées à cette application sont extrêmement compliquées. Donc ce premier essai prouve non seulement la possibilité technique de l'utilisation de la tension de l'air pour les chemins de fer en général, mais il prouve aussi que cette application sera encore plus facile par l'emploi

de moyens moins compliqués, et pour ainsi dire plus naturels. Déjà les résultats du chemin de fer de Dublin ont été si avantageux, qu'en Angleterre on est sur le point de construire plusieurs autres chemins de fer d'après ce système; il est donc probable qu'on pourrait obtenir encore de plus grands avantages, si l'on adoptait des systèmes moins compliqués et plus convenables. Quelques ingénieurs sont même d'avis, que les chemins de fer dits atmosphériques, construits suivant le système de celui de Dublin, seraient préférables ***partout*** et dans ***toutes*** les circonstances, aux chemins de fer ordinaires, même pour ce qui concerne les frais d'établissement. Mais nous prouverons plus bas le contraire. Il est bien probable, et même presque certain, que la force de l'air est préférable partout à celle de la vapeur, ***dans les points énumérés §. 3,*** mais si l'on veut qu'elle le soit aussi sous le point de vue des ***frais de construction***, il faudra adopter un autre système que celui de Dublin.

Nous discuterons tout cela en détail dans ce qui suit, et nous essaierons de rechercher les systèmes qui techniquement, sont les plus simples et les moins coûteux.

Différentes manières de se servir de la force élastique de l'air comme force motrice sur les chemins de fer.

4.

Ces différentes manières, du moins celles qui déjà ont été, ou mises en exécution ou proposées et recommandées avec plus ou moins d'instance, sont les suivantes.

I. ***Premier système.*** On peut coucher au milieu, entre les rails et le long de la voie, un tube, dans lequel glisse un piston, ***devant*** lequel on raréfie l'air plus ou moins par une machine pneumatique, de sorte que la pression de l'air atmosphérique sur l'autre côté du piston gagne le dessus, et pousse le piston le long de la route. Le piston est mis en communication avec le premier wagon, ou avec le wagon-conducteur, au moyen d'une tige perpendiculaire, et les autres voitures du train sont attachées au wagon-conducteur. Le tube de propulsion doit avoir, dans toute sa longueur, une rainure pour le passage de la tige de communication, et afin que l'air ne puisse rentrer dans le tuyau ***devant*** le piston où il est raréfié, la rainure doit être fermée dans toute sa longueur par une soupape bien ajustée, qui n'est levée que par la tige même, et toujours sans laisser pénétrer l'air devant le piston. Mais cette soupape présente techniquement de grandes difficultés. Un wagon sans charge de per-

sonnes ou de marchandises, comme la locomotive et le tender sur les chemins de fer à vapeur, n'existe pas ici, car le wagon-conducteur lui même peut recevoir une charge. Seulement le conducteur du train, avec ce dont il a besoin pour la direction du train, doit y trouver place.

Ce système est celui de Dublin et des chemins de fer *atmosphériques proprement dits.*

II. ***Second système.*** Ce système étant en tout conforme au précédent, avec cette seule différence que l'air, au lieu d'être *raréfié devant* le piston, est *comprimé derrière* lui, n'a encore été, autant que je sache, ni proposé ni exécuté en détail; mais sa différence du N°. I est si peu de chose, qu'il ne peut être effectivement appelé nouveau. Pour le mettre à exécution, il n'y à qu'à disposer autrement la soupape longitudinale. Il faut ici qu'elle ferme la rainure de dehors en dedans, au lieu de dedans en dehors, comme dans N°. I.

III. ***Troisième système.*** Au lieu d'un tube en fonte solide, muni d'une rainure et d'un piston glissant dans le tuyau, on peut coucher entre les rails un tuyau *sans* piston, dans lequel on introduit l'air à force d'une machine pneumatique, pour *l'enfler* derrière une roue du wagon-conducteur roulant sur le tuyau, au milieu, entre les rails. Le wagon-conducteur tirera alors également le train après lui.

Ce système serait l'exécution d'une proposition faite dans le 17me numéro du journal des chemins de fer de 1844, par un Anonyme, mais dont l'idée première avait été déjà conçue, il y a plusieurs années, par un Ingénieur prussien, qui alors songeait à l'employer pour élever l'eau.

IV. ***Quatrième système.*** Comme dans N^{os}. I et II, on couche entre les rails un tuyau en fonte ou en fer solide, dans lequel on *comprime* l'air, et dont on se sert de *réservoir* de force expansive de cet air. Alors on fait tirer le train des wagons par une machine locomotive, parfaitement semblable aux locomotives à vapeur, avec la seule différence, qu'ici ce n'est pas la vapeur qui, en agissant sur les pistons des cylindres la mêt en mouvement, mais la force de l'air comprimé qu'elle tire du tuyau-réservoir. Cette *locomotive à air* n'aura donc ni chaudière, ni cheminée, mais toutes ses autres parties seront parfaitement les mêmes que celles des locomotives à vapeur.

V. ***Cinquième système.*** Au lieu d'enfermer dans un tuyau couché entre les rails le long de la route l'air comprimé, dont l'élasticité fournit la force motrice, comme dans N°. IV, on l'enferme dans un grand ou dans plusieurs petits bassins placés sur la locomotive même, qui d'ailleurs est construite

encore de la même manière, de sorte qu'elle ressemble encore davantage aux locomotives ordinaires, et n'en diffère plus qu'en ce que les réservoirs d'air comprimé prennent ici la place de la chaudière de la locomotive à vapeur.

Ce système est celui qui a été proposé pour la première fois, autant que je sache, par Mr. ***de Baader*** de Munich, il y a environ 30 ans. Mr. ***Henschel,*** Ingénieur en chef des mines à Cassel, en Hesse, l'a reproduit en 1833. En 1838, j'en ai fait mention dans un mémoire sur la construction des chemins de fer dans des terrains fortement accidentés, lu à l'académie des sciences de Berlin, en Août 1844. Mr. ***Andraud*** de Paris a fait quelques expériences avec une locomotive à air d'assez fortes dimensions, sur l'un des deux chemins de fer de Paris à Versailles. Dans ces expériences, la locomotive ne marchait que seule, et sans tirer des wagons après elle, parceque les moyens manquaient encore pour comprimer l'air à un degré suffisant. Ces expériences ont réussi d'ailleurs parfaitement, et l'on assure qu'elles seront continuées avec de l'air plus fortement comprimé, et en attachant alors un train à la locomotive.

Description technique des différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air, comme force motrice sur les chemins de fer.

5.

Avant de pouvoir établir des comparaisons entre les cinq différents systèmes entre eux et le système ordinaire à vapeur, il sera nécessaire de faire voir en détail le meilleur mode de construction de chacun de ces cinq systèmes. Car des comparaisons fondées sur des calculs ne peuvent être faites, avant d'avoir montré que les systèmes sont ***praticables,*** et avant d'avoir décrit leur construction.

Les cinq systèmes ci-dessus, quant à leurs principes fondamentaux, peuvent être rangés en *deux* catégories: la première avec un tube entre les rails le long de la voie: c'est le cas des N^{os}. I, II, III et IV; la seconde n'en ayant point; c'est N^{o}. V.

Des quatre systèmes de la première classe, N°. III n'a ni rainure ni soupape dans son tuyau. Le N°. IV également n'en a pas besoin, si l'on adopte la construction proposéee par Mr. ***Pecqueur;*** mais comme cette construction est excessivement compliquée, et que la difficulté d'empêcher l'air comprimé de s'échapper du tuyau parait être encore plus grande qu'avec l'emploi d'une rainure, nous lui donnons aussi une rainure avec soupape, comme aux N^{os}. I et II.

Donc nous avons maintenant *trois* systèmes différents, savoir: ceux N^{os}. I, II et IV, avec un tube le long de la voie, muni d'une rainure et d'une

soupape longitudinale, où la rainure et la soupape, comme on le verra, peuvent être construites d'une manière qui, au fond, est la même dans les trois systèmes; puis N°. III avec tuyau sans rainure, et N°. IV sans aucun tuyau.

Nous commencerons par les N^os^. I, II et IV et par N°. IV particulièrement, puisque la construction en est la plus difficile, et que N. I et II n'en sont que des cas particuliers et plus simples.

Les paragraphes 6—14, qui suivent ici, contiennent la description technique en détail des cinq systèmes, et comme ces objets purément techniques pourraient n'être que d'un foible intérêt pour les lecteurs du présent journal, nous les supprimons ici.

Raréfaction et compression de l'air dans le tube de propulsion.

15.

Une première question relative aux N^os^. I et II est de savoir, si pour produire la force motrice nécessaire sur un chemin de fer proposé, il sera plus avantageux de *raréfier* l'air dans le tube de propulsion devant le piston, que de le *comprimer* derrière le piston, c'est-à-dire, lequel des deux aura besoin de moins de force productive. L'effet est évidemment le même, soit qu'on raréfie l'air devant le piston, à une demi-atmosphère, par exemple, soit qu'on le comprime derrière le piston à la tension d'une atmosphère et demie; l'excédant qui fournit la force motrice est également d'une demi-atmosphère dans les deux cas.

Si l'on veut *raréfier* l'air devant le piston, il faut que cela se fasse d'abord *avant* la mise en mouvement du train, et par conséquent dans toute l'étendue du tuyau. En même temps il faut qu'on épuise encore l'air qui rentre par la soupape, dont l'herméticité n'est jamais complète. Puis il faut que l'on continue à épuiser l'air *pendant* le mouvement, et aussi également l'air qui rentre par la soupape pendant la durée du mouvement. Cette seconde partie de l'épuisement doit être opérée avec la même vitesse que celle de la marche du piston; car si cela n'était pas ainsi, l'air raréfié devant le piston ne tarderait pas à reprendre une plus grande densité, à mesure que le piston avance, et par cela, le volume de cet air diminuant, la force motrice diminuerait aussi. Si, par ex., l'air dans le tube avait été raréfie jusqu'à la tension d'une demi-atmosphère et que l'épuisement ne continuât plus, l'air reprendrait la tension d'une atmosphère entière aussitôt que le piston aurait parcouru la *moitié* de sa course, et arrivé à ce point, la force motrice serait réduite à zéro.

Si l'on *comprime* l'air derrière le piston, il faut que cela se fasse de sorte que l'air qui occupe l'espace toujours croissant derrière le piston, conserve la tension nécessaire à la production de la force motrice.

Supposons $= \mu$ atmosphères la tension de l'air qui produit la force motrice nécessaire. μ sera toujours < 1 dans le cas de la ***raréfaction*** de l'air. Supposons $= p$ mèt. cubes le volume du tube de propulsion, il faut que μp mèt. cub. d'air atmosphérique soient tirés du tuyau ***avant*** le commencement de la course des wagons. Le ***reste*** de l'air doit être épuisé ***pendant*** la course dans ***tous les cas;*** donc, quel que soit μ, il faut toujours épuiser ***tout*** l'air atmosphérique qui se trouve dans le tuyau, c'est-à-dire p mètres cubes d'air. Si l'épuisement ***avant*** le commencement du mouvement est opéré en τ secondes, et si le mouvement dure t secondes, il faut en outre épuiser encore l'air qui pendant $\tau + t$ secondes rentre dans le tuyau par la soupape.

Si au contraire on ***comprime*** l'air derrière le piston, il doit être ***introduit*** dans le tube de propulsion $(1+\mu)p$ mèt. cub. d'air, et cela pendant la durée du trajet, c'est-à-dire pendant t secondes. En outre il faut qu'on introduise de nouveau l'air échappé par la soupape pendant ces t secondes.

D'après ces données, il y aura à calculer la force nécessaire aux machines pneumatiques.

Premier cas.

Raréfaction de l'air dans le tube de propulsion.

16.

Au commencement du mouvement, l'air dans le tube a la tension de l'atmosphère, et il s'y trouve p mèt. cub. de cet air. Il en faut épuiser μp mètres cubes pour produire un excédant de pression sur le piston de μ atmosphères.

Comme plus bas le cas se présentera où l'air ***est déjà*** raréfié au commencement du mouvement, nous supposerons que la tension de l'air n'est pas $= 1$ atm. au commencement, mais $= 1 - \lambda$ atm., comme si λp mèt. cub. d'air avaient été déjà épuisés, et qu'alors l'épuisement dût être continué jusqu'à ce que la tension de l'air *devant* le piston soit réduite à $1 - \mu$ atm. Le résultat du calcul pourra alors être appliqué immédiatement au cas ci-dessus, en fésant $\lambda = 0$.

A. La densité de l'air dans le tube au commencement de l'épuisement est donc supposée $= 1 - \lambda$, et il s'y trouve $(1-\lambda)p$ mètres cubes d'air atmosphérique. Supposons $= k$ le volume du cylindre de la machine pneumatique: le premier coup de son piston fera sortir du tube de propulsion $(1-\lambda)k$ mèt. cub. d'air atm. Il y en restera donc $(1-\lambda)p - (1-\lambda)k = (1-\lambda)(p-k)$ mèt. cub d'air. Cet air occupe le volume p, sa densité est donc $= (1-\lambda)\frac{p-k}{p}$ après le ***premier*** coup du piston de la machine pneumatique. Donc le second coup de la

machine fera sortir du tube $(1-\lambda)\frac{p-k}{p}\cdot k$ mèt. cub. d'air atm. et il n'y en restera que $(1-\lambda)(p-k)-(1-\lambda)\frac{p-k}{p}\cdot k=(1-\lambda)\frac{(p-k)^2}{p}$ mèt. cub. Cet air est distribué dans l'espace p, et par conséquent l'air du tube aura la densité $(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^2$ après le *second* coup de la pompe. Le *troisième* coup en fera donc sortir $(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^2 k$ mèt. cub. d'air atm. et il ne restera dans le tube que

$$(1-\lambda)\frac{(p-k)^2}{p}-(1-\lambda)\frac{(p-k)^2}{p}\cdot\frac{k}{p}=(1-\lambda)\frac{(p-k)^3}{p^2}$$ mèt. cub. d'air atm.

répandus dans l'espace p, de sorte que la densité de l'air dans le tube de propulsion après le *troisième* coup de la pompe est encore $=(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^3$. Et ainsi de suite. Après le n^{me} coup de la machine pneumatique il restera donc encore dans le tube de propulsion

$$3.\quad (1-\lambda)p\left(\frac{p-k}{p}\right)^n \text{ mèt. cub. d'air atm.}$$

et la densité de l'air dans le tube sera

$$4.\quad (1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^n.$$

La densité ou la tension de l'air dans le tube doit être réduite à $1-\mu$ atm. pour donner la force μ au piston de propulsion. Il faudra donc que

$$5.\quad 1-\mu=(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^n.$$

De là on tire $\sqrt[n]{\left(\frac{1-\mu}{1-\lambda}\right)}=\frac{p-k}{p}=1-\frac{k}{p}$ et

$$6.\quad k=\left[1-\sqrt[n]{\left(\frac{1-\mu}{1-\lambda}\right)}\right]p \quad \text{ou bien} \quad p-k=p\sqrt[n]{\left(\frac{1-\mu}{1-\lambda}\right)}:$$

formule propre au cas où p, μ, λ et n sont donnés. Si au contraire p, μ, λ et k étaient donnés, on tireroit de (6.)

$$\log(p-k)=\frac{1}{n}(\log(1-\mu)-\log(1-\lambda))+\log p \text{ et}$$

$$7.\quad n=\frac{\log(1-\lambda)-\log(1-\mu)}{\log p-\log(p-k)}.$$

Dans le cas ci-dessus où $\lambda=0$, les expressions (6 et 7) donnent

$$8.\quad p-k=p\sqrt{(1-\mu)} \text{ et}$$

$$9.\quad n=-\frac{\log(1-\mu)}{\log p-\log(p-k)}.$$

Le tube de propulsion à Dublin a, suivant Mr. ***Mallet,*** 15 pouces anglais de diamètre et une longueur de 2490 yards. Son volume est donc $= 259{,}7$ mèt. cub. Nous y ayoutons suivant Mr. ***Samuda*** 5 pour cent pour la rentrée de l'air par la soupape. Donc on a ici $p = 272{,}7$. La machine pneumatique de ***Dalkey*** donne 22 coups de piston par minute, suivant Mr. ***Mallet.*** Donc si dans le tube de propulsion la tension de l'air doit être réduite à $1-\mu = \frac{1}{2}$ atm. en 5 minutes, ou par 110 coups de piston, il faut suivant (8.) que $p-k$ soit $= p\sqrt[110]{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $k = 1{,}7313$, et il faut au cylindre de la pompe un volume de 1,7313 mèt. cub. Pour $n = 66$, c'est-à-dire si la raréfaction de l'air doit être opérée en 3 minutes, il se trouve $k = 2{,}775$, et pour $n = 44$ ou pour 2 minutes, $k = 4{,}266$. Le cylindre de la pompe pneumatique de ***Dalkey*** a, suivant Mr. ***Mallet,*** 67 pouc. angl. de diamètre, et la course du piston est de 66 pouces; donc le volume de chaque coup est $= 3{,}8027$ mèt. cub., de sorte que la machine a la force de raréfier l'air du tuyau jusqu'à la tension d'une demi atm. dans un temps d'un peu plus de 2 minutes, ce qu'elle a aussi effectué dans les expériences de Mr. ***Mallet.***

B. La tension supposée $1-\lambda$ de l'air dans le tube ayant été réduite à $1-\mu$ ***avant*** le commencement de la course des wagons, il faut encore épuiser ***pendant*** la course les $(1-\mu)p$ mèt. cub. d'air qui y restaient. Si l'on veut que sur une pente constante, le train des wagons se meuve avec une vitesse également constante, il faut que l'air dans le tube de propulsion conserve toujours la ***même*** force expansive, car si cette force venait à diminuer ou à augmenter, la vitesse du mouvement serait retardée ou accélérée. Il faut donc que ***chaque*** coup de piston de la machine pneumatique épuise constamment $(1-\mu)k$ mèt. cub. d'air atm. Donc le nombre des coups nécessaires pour faire sortir les $(1-\mu)p$ mèt. cub. d'air, nombre que nous désignerons par n_1, est

$$10. \qquad n_1 = \frac{(1-\mu)p}{(1-\mu)k} = \frac{p}{k}.$$

Dans l'exemple ci-dessus, du chemin de fer de Dublin, cette expression, p étant $= 272{,}7$ et $k = 3{,}8027$, donne $n_1 = 72$, et comme la pompe donne 22 coups par minute, il faut que la course des wagons dure $\frac{72}{22} = 3{,}24$ min. C'est à-peu-près ce qui a eu lieu dans les expériences de Mr. ***Mallet.***

C. ***Avant*** le n^{me} coup de piston de la pompe la densité de l'air dans le tube de propulsion est $= (1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^{n-1}$ (4.). Donc l'unité de surface du piston est pressée de dedans en dehors par la tension $(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^{n-1}$, et de

dehors en dedans par la tension 1 de l'atmosphère. Si donc on désigne par $\varkappa$ la surface du piston en mèt. carrés, et par σ la pression de l'atmosphère par mètre carré en kilogrammes, la force nécessaire pour soulever le piston est

$$11. \quad = \varkappa\sigma\left[1-(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^{n-1}\right] \text{ kilogr.}$$

Soit la hauteur du coup de piston $= h$ mèt., sa vitesse $= v$ mèt., le temps d'un coup de piston $= \tau$ secondes, de sorte que $v = \frac{h}{\tau}$, la force (11.), multipliée par v, donne le *moment* pour une seconde, et multipliée encore par τ, de sorte que la force est à multiplier par $v\tau = h$, on trouve

$$12. \quad h\varkappa\sigma\left[1-(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^{n-1}\right] = k\sigma\left[1-(1-\lambda)\left(\frac{p-k}{p}\right)^{n-1}\right]$$

pour *le moment de la force d'un coup de piston.* Ce *moment* est invariable, si même la durée des coups de piston variait, car la force invariable (11.) est toujours à multiplier par h, quels que soient v et τ.

Le *moment total* de n coups de piston, que nous désignerons par M_1, est *la somme de la série* que donne (12.), si l'on y fait successivement $n = 1, 2, 3, 4, \ldots . n$. Cette somme est

$$13. \quad M_1 = k\sigma\left[n-(1-\lambda)\left(1-\left(\frac{p-k}{p}\right)^n\right):\left(1-\frac{p-k}{p}\right)\right]$$

$$= k\sigma\left[n-(1-\lambda)\frac{p}{k}\left(1-\left(\frac{p-k}{p}\right)^n\right)\right],$$

et si l'on substitue dans cette expression celle de $\left(\frac{p-k}{p}\right)^n = \frac{1-\mu}{1-\lambda}$ (6), on trouvera

$$14. \quad M_1 = k\sigma\left[n-(1-\lambda)\frac{p}{k}\left(1-\frac{1-\mu}{1-\lambda}\right)\right] = \sigma[kn-p(\mu-\lambda)].$$

Voilà l'expression du *moment* de la force nécessaire pour réduire la tension $1-\lambda$ de l'air dans le tube de propulsion p à celle $1-\mu$. L'expression (14.) donne M_1 par le volume p du tube de propulsion, par le volume k du cylindre de la machine pneumatique, par le nombre n des coups de son piston, et par les deux tensions λ et μ de l'air.

La pression de l'atmosphère σ est celle d'une colonne d'eau d'environ 9,418 mètres de hauteur, donc σ est le poids de 9,418 mètres cubes d'eau; par suite on a

$$15. \quad \sigma = 9418 \text{ kilogr.}$$

Si l'on veut exprimer M_1 en *force de chevaux* pour savoir combien il faut de chevaux pour opérer la raréfaction demandée de l'air dans le temps déterminé de τ secondes, ou bien aussi le nombre des secondes τ pendant

lesquelles une machine de la force de m_1 chevaux puisse effectuer l'épuisement, il faut multiplier par τ le *moment* de m_1 chevaux, pris pour une seconde. Le *moment* d'un cheval par seconde, que nous désignerons par φ, exprimé en mètres et kilogrammes, comme M_1, est

$$16. \quad \varphi = 56{,}225 \cdot 1{,}0462 = 58{,}823;$$

car un cheval a la force d'élever 56,225 kilogr. dans une seconde à la hauteur de 1,0462 mèt.

On a donc l'équation

$$17. \quad M_1 = m_1 \varphi \tau = \sigma[kn - p(\mu - \lambda)]$$

et on en tire

$$18. \quad m_1 = \frac{\sigma}{\varphi \tau}[kn - p(\mu - \lambda)]$$

pour le nombre de chevaux nécessaires pour réduire en τ secondes la tension $1-\lambda$ de l'air dans le tube de propulsion à la tension $1-\mu$, et

$$19. \quad \tau = \frac{\sigma}{m_1 \varphi}[kn - p(\mu - \lambda)]$$

pour le nombre de secondes pendant lesquelles une machine pneumatique de la force de m_1 chevaux produira cet effet. Le nombre n des coups de piston de la machine se trouve suivant (7.) exprimé en p, k, λ et μ.

Dans le cas actuel, où $\lambda = 0$, les expressions (18 et 19) se réduisent à

$$20. \quad m_1 = \frac{\sigma}{\varphi \tau}(kn - p\mu) \text{ et}$$

$$21. \quad \tau = \frac{\sigma}{\varphi m_1}(kn - p\mu).$$

Comme dans les calculs ci-dessus on n'a eu égard qu'à *l'équilibre* entre la force et la résistance, il faudra encore ajouter à cette dernière une partie proportionnelle pour la friction, pour la production de la vitesse et pour les autres résistances accidentelles. Nous supposerons cette partie = 10 pour cent.

Dans l'exemple du chemin de fer de Dublin p était = 272,7, k = 3,8027, $\mu = \frac{1}{2}$. Cela donne en vertu de (7), ou plutôt de (9),

$$22. \quad n = \frac{-\log \frac{1}{2}}{\log 272{,}7 - \log 268{,}9} = 50.$$

Donc, si l'on veut que la raréfaction de l'air y soit opérée en 2 minutes, on a $\tau = 2 \cdot 60 = 120$. La formule (20) donne alors

$$23. \quad m_1 = 72,$$

et en y ajoutant 10 pour cent, on trouve que $72 + \frac{72}{10} = 80$ chevaux y sont nécessaires pendant 2 minutes. Une machine de 100 chevaux, c'est-à-dire

de 91 chevaux effectifs, produit suivant (21) l'effet demandé en

24. $\tau = 95$ secondes.

D. La pression de l'air sur le piston de la pompe ***pendant*** la course des wagons, où encore $(1-\mu)p$ mèt. cub. d'air atm. sont à épuiser, est invariablement $= (1-\mu)k\sigma$ de dedans en dehors, et $= 1 \cdot k\sigma$ de dehors en dedans. Donc une force de

25. $\varkappa\sigma(1-(1-\mu)) = \varkappa\sigma\mu$ kilogr.

est nécessaire pour soulever le piston. Le *moment* de cette force pour un coup du piston est suivant (***C***)

26. $= k\sigma\mu$,

et le moment total relatif à n_1 coups, que nous désignerons par M_2, est ici, où les moments pour les coups successifs ne varient pas,

27. $M_2 = n_1 k\sigma\mu$.

En y substituant $n_1 = \frac{p}{k}$ (10), cela donne

28. $M_1 = \sigma\mu p$,

de sorte qu'ici la valeur du moment, est indépendante de la grandeur du cylindre de la pompe.

Supposé que m_2 chevaux doivent travailler pendant t secondes, on a

29. $m_2 t\varphi = \sigma\mu p$,

et cela donne

30. $m_2 = \frac{\sigma\mu p}{t\varphi}$ et

31. $t = \frac{\sigma\mu p}{m_2\varphi}$.

Supposons que la longueur du tuyau de Dublin, qui est de 2490 yards $= 2277$ mèt., doit être parcourue avec une vitesse de 8,37 mèt. par seconde (4 milles de Prusse par heure), on a $t = \frac{2277}{8{,}37} = 272$, et en vertu de (30)

32. $m_2 = 80$.

Donc il faut à la machine pneumatique une force de $80 + \frac{80}{10} = 88$ chevaux pour produire cet effet. Pour une machine de 100 chevaux, ou bien de 91 chevaux effectifs, la formule (31) donne

33. $t = 252$,

et cela correspond à une vitesse de 9,102 mèt. par seconde. La machine de Dublin, ***qui a 100 chevaux de force***, ne peut donc produire qu'une vitesse de 8,37 mèt. par seconde avec une tension d'air de $\mu = \frac{1}{2}$, et par conséquent

elle *n'est pas* trop forte pour cet effet. Il est vrai qu'elle n'est pas incapable de produire une vitesse plus considérable encore, car comme nous l'avons vu ci-dessus en (*C*), elle a plus de force qu'il ne lui en faut pour raréfier l'air *avant* le commencement de la course. Mais quand on demande une vitesse plus forte, il faut que la tension μ de l'air raréfié, et par conséquent la force du piston, soit plus faible. Si, par ex., la vitesse devait être de 12,55 mètres par seconde, μ ne pourrait être que $\frac{5}{12}$.

Second cas.

Compression de l'air dans le tube de propulsion.

17.

A. La machine pneumatique ne fonctionne pas ici *avant* le commencement du trajet des wagons; elle ne fonctionne que *pendant* leur course; et pour obtenir une force motrice de μ atm. il faut qu'on introduise $(1+\mu)p$ mètres cubes d'air atm. dans le tube de propulsion *pendant* la course des wagons. Pour cet effet, il en faut

$$34. \quad n = (1+\mu)\frac{p}{k}$$

coups de piston de la machine pneumatique; car chaque coup introduit k mètres cubes.

B. L'air agit ici sur le piston de la pompe avec la tension *invariable* $1+\mu$ de dedans en dehors, et avec celle 1 de dehors en dedans, donc il faut

$$35. \quad z\sigma(1+\mu-1) = z\mu\sigma \text{ kilogr.}$$

de force pour faire *descendre* le piston de la pompe. Cette force est égale à celle (25. §. 16. IV.) nécessaire pour *raréfier* l'air dans le tube *pendant* la course des wagons. Donc aussi le *moment* de la force, que nous désignerons par N, est ici comme à l'endroit cité,

$$36. \quad N = nk\sigma\mu.$$

En mettant dans cette expression celle de n (34), on obtient

$$37. \quad N = \sigma\mu(1+\mu)p$$

et, pareillement comme en (29),

$$38. \quad m_2 t\varphi = \sigma\mu(1+\mu)p.$$

De là on tire

$$39. \quad m_2 = \frac{\sigma\mu(1+\mu)p}{t\varphi}$$

pour le nombre de chevaux nécessaires pour faire le trajet en t secondes et

$$40. \qquad t = \frac{\sigma\mu(1+\mu)p}{m_2\varphi}$$

pour le nombre de secondes pendant lesquelles la force de m_2 chevaux fait parcourir au train la longueur du tube.

Dans l'exemple ci-dessus la formule (39) donne pour une vitesse de 8,37 mèt. par seconde, c'est-à-dire pour $t = 272$ (§. 16. ***D.***),

$$41. \qquad m_2 = 120,$$

et en y ajoutant 10 pour cent, on trouve qu'ici 132 chevaux sont nécessaires; mais seulement pendant 272 secondes. Dans le cas de la ***raréfaction*** de l'air 86 chevaux auront à travailler d'abord 272 sec. ***pendant*** le trajet, et puis encore environ 108 sec. (23) ***avant*** le départ des wagons, et par suite en tout 380 secondes. Pour une machine de 100 chevaux, on trouve ici

$$42. \qquad t = 363,$$

et cela ne donne qu'une vitesse de 6,27 mèt. par seconde. Les 100 chevaux pour ***comprimer*** l'air auront à travailler pendant 363 sec., et pour ***raréfier*** l'air, pendant $252 + 95 = 347$ sec. (33 et 24), de sorte que dans ce cas, pour produire la force motrice d'une demi-atmosphère, la ***raréfaction*** de l'air est un peu préférable à la compression.

Il est désavantageux d'épuiser l'air du tube de propulsion, ou de l'y introduire immédiatement par la machine pneumatique.

18.

A. Si l'on fait sortir l'air du tube de propulsion ***immédiatement*** par la machine pneumatique, il faut que la première partie de cette opération qui, ***avant*** le départ des wagons est nécessaire, pour produire la force motrice, soit exécutée bien promptement, pour éviter autant que possible la ***rentrée*** de l'air par la soupape. Le temps pendant lequel le reste de l'épuisement est à effectuer, est celui de la durée de la course, et par conséquent aussi très-court.

Si l'on fait ***comprimer*** l'air dans le tube de propulsion ***immédiatement*** par la machine pneumatique, cela doit être fait également ***pendant*** la course des wagons, et par suite aussi dans un espace de temps très-court.

Mais dans la même proportion que le temps du travail accordé à la machine pneumatique est borné, cette machine doit être plus forte; et comme la machine est en repos dans les intervalles entre les courses, il lui faut beaucoup

plus de force qu'elle n'en aurait besoin effectivement, si elle avait à fonctionner sans interruption.

Un autre inconvénient encore, c'est que les interruptions réitérées de la machine lui sont nuisibles, et que le chauffage nécessaire pour mettre la machine en action, ainsi que la chaleur qui reste après le travail, occasionnent des pertes réelles. Si au lieu de la force de la vapeur on peut se servir de celle de *chûtes d'eau*, la perte est encore plus grande, dans le cas où la machine hydraulique tire sa force, non pas d'un réservoir, mais d'un courant d'eau. Et la force du *vent* est ici presque inapplicable. Il est vrai que pour faire marcher *continuellement* les machines pneumatiques, ou hydrauliques, ou celles à vent, on pourrait les employer à d'autres travaux pendant les intervalles entre les courses des wagons, par ex. les faire moudre du blé etc.; mais d'un côté, cela ne serait guère praticable *partout*, d'un autre côté, les interruptions seraient également nuisibles ici, et enfin on serait forcé d'imposer aux chemins de fer des entreprises qui leur sont étrangères, et qui en généraient et compliqueraient l'administration.

B. Mais la manière de produire la force motrice non-continuellement ou par interruptions a des inconvénients encore beaucoup plus graves. Si par hazard la machine éprouvait un accident, le train des wagons se trouverait arrêté au milieu du trajet, et il ne resterait d'autres ressources que d'envoyer des chevaux pour lui faire achever sa course. Il est vrai qu'on pourrait obvier à cet inconvénient en construisant deux machines, chacune de la moitié de la force nécessaire, au lieu d'une seule de la force entière; mais si l'accident arrivé à l'une des deux machines ne peut être réparé immédiatement, le service éprouvera toujours des retards qui auront de l'influence sur toute la ligne, parceque la moitié de la force ne suffit pas pour un temps plus considérable; non pas même pour deux courses seulement. Et puis deux machines et leur travail sont plus cheres qu'une seule de la force des deux.

C'est donc toutefois un arrangement très-imparfait et très-coûteux que de faire épuiser l'air du tube *immédiatement* par les machines pneumatiques, ou de l'y faire introduire par elles, en grande hâte, et pour chaque course séparément. Un autre arrangement, où les machines aient à travailler continuellement et puissent produire quelque force en *réserve*, est donc de toute nécessité.

Réservoirs.

19.

Ce but peut être atteint, si au lieu de faire sortir l'air du tube de propulsion, ou de l'y faire introduire immédiatement par la machine pneumatique, on construit des ***réservoirs*** d'une grandeur proportionnée, d'où les machines pneumatiques épuisent d'abord l'air, ou dans lesquels elles l'introduisent. Si alors on met en communication ces réservoirs avec le tube de propulsion au moyen de tuyaux munis de robinets, on pourra produire à volonté la dilatation ou la compression nécessaire de l'air dans le tube de propulsion. Et cet arrangement aura plus d'un avantage sur l'autre.

Premièrement. Les machines pneumatiques pourront fonctionner alors non seulement pendant les courses des wagons, et dans le cas de la raréfaction de l'air, avant le départ des trains, mais ***continuellement,*** et elles auront par conséquent besoin de moins de force. Si ces machines sont mises en mouvement par la force de la vapeur, elles consumeront moins de cokes, à cause de la continuité de leur travail, et la force de courants d'eau est ici exploitable sans difficulté; et même la force du vent, celle-ci au moins par supplément aux autres forces disponibles.

Secondement. En raréfiant l'air, on ne perdra pas chaque fois avant les départs des wagons plusieurs minutes pour obtenir la force motrice: aussitôt qu'on aura ouvert le robinet du tuyau de communication, l'air se précipitera avec véhémence du tube de propulsion dans le réservoir vidé.

Troisièmement. La tension de l'air dans le tube de propulsion pourra être beaucoup mieux ***réglée*** par le robinet que par l'action immédiate de la machine.

Quatrièmement. Au moyen des réservoirs, on pourra produire aisément et sans effort momentané de la machine, un surplus de force, qui pourra être nécessaire; surtout au commencement du mouvement, pour engendrer la ***vitesse.*** Cela, a défaut de réservoirs, n'est praticable qu'avec un grand effort additionel de la machine, pour lequel il lui faut une force plus grande encore. Cela sera l'objet d'une explication ultérieure (§. 26).

Mais il s'agit de savoir si les réservoirs ne seraient peut être pas tellement coûteux, que les frais de leur établissement et de leur entretien ne fussent supérieurs à l'économie qu'ils semblent offrir. Il est vrai que, même dans ce cas, ils conserveraient encore les avantages énumérés ci-dessus, mais on voudra

savoir, si peut-être ces avantages ne seraient pas payés trop cher. Pour décider cette question nous aurons à faire voir la possibilité des réservoirs et leur construction. Puis nous aurons à calculer l'effet des machines pour le cas des réservoirs.

Construction des réservoirs.

1. *Pour le cas de la raréfaction de l'air.*

20.

Dans ce cas, il faut des réservoirs dans lesquels l'air soit raréfié comme dans le tube de propulsion, mais à ***un plus haut degré.*** Car aussitôt qu'on ouvrira le robinet du tuyau de communication, l'air atmosphérique contenu dans le tube de propulsion se répandra dans les espaces du tube et du réservoir combinés, et cela, même avant le départ des wagons; puis pendant la course des wagons, le reste de l'air contenu dans le tube de propulsion entrera encore dans le réservoir, et par tout cet air, la tension de l'air dans le réservoir ne doit pas être augmentée au dessus de la tension nécessaire pour produire la force motrice, c'est-à-dire au dessus de $1-\mu$. Si l'on veut que les réservoirs suffisent à plus d'une seule course, sans être vidés de nouveau, pour pouvoir prêter encore leur service dans le cas d'accidents arrivés à la machine pneumatique, il faut, ou y raréfier l'air à un degré plus haut encore, ou en augmenter le volume.

Supposons que les réservoirs soient capables de recevoir l'air du tube de propulsion pour ε courses, sans que par cela la tension de l'air raréfié qu'ils contiennent soit augmentée au dessus de $1-\mu$, il faudra qu'après y avoir introduit εp mètres cubes d'air atm. l'air qu'ils contiennent alors n'ait encore atteint que la tension $1-\mu$. Car suivant ce qu'on a fait voir ci-dessus, μp mèt. cub. d'air atm. doivent être épuisés ***avant*** le départ de chaque train, et $(1-\mu)p$ mèt. cub. d'air atm. ***pendant*** chaque course, ce qui fait en tout p mèt. cub. d'air pour chaque course, et εp mèt. cub. pour ε courses. Maintenant si l'on désigne par b le volume des réservoirs et qu'on suppose que la machine pneumatique en ait épuisé νb mèt. cub. d'air atm., de sorte qu'il n'y reste que $(1-\nu)b$ mèt. cub., il faut que εp mèt. cub., ajoutés à ce reste, ne produisent que la tension $1-\mu$ de l'air dans les réservoirs, ce qui aura lieu si alors il ne se trouve en tout dans les réservoirs que $(1-\mu)b$ mèt. cub. d'air atm. Il faut donc que

$$43. \quad (1-\nu)b+\varepsilon p = (1-\mu)b.$$

Delà on tire $\varepsilon p = (\nu - \mu) b$ et

$$44. \qquad b = \frac{\varepsilon p}{\nu - \mu}.$$

Voilà le volume nécessaire aux réservoirs.

En supposant comme ci-dessus $\mu = \frac{1}{2}$ et que l'air dans les réservoirs doive être raréfié jusqu'à la tension $1 - \nu = \frac{1}{6}$, de sorte que $\nu = \frac{5}{6}$, la formule (44) donne

$$45. \qquad b = \frac{\varepsilon p}{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}} = 3\,\varepsilon p.$$

Donc pour $\varepsilon = 1$ course les réservoirs doivent avoir 3 fois, pour $\varepsilon = 2$ courses 6 fois la grandeur du tube de propulsion.

Pour donner un exemple, nous pourrions de nouveau recourir au chemin de fer de Dublin, mais comme ce chemin, à cause de son peu de longueur, serait trop favorable au système des réservoirs, nous supposerons plutôt un cas, tel qu'il s'en présenterait sur les grandes lignes.

Soit la longueur du tube de propulsion $= 7532{,}4$ mèt. (un mille de Prusse), son diamètre comme ci-dessus $= 0{,}366$ mèt. Le volume de ce tube est 824,3 mèt. cub. Ajoutons y 3,1 mèt. cub. pour la rentrée par la soupape, qui est ici moins considérable, vu qu'elle n'a lieu que *pendant* la course, nous aurons

$$46. \qquad p = 824{,}4 \text{ mèt. cub.};$$

donc suivant (45)

$$47. \quad \begin{cases} b = 2473{,}2 \text{ mèt. cub. pour une course et} \\ b = 4946{,}4 \text{ mèt. cub. pour deux courses.} \end{cases}$$

Il suffira si le réservoir fait son service pour ***deux*** courses sans être vidé de nouveau. Donc, il faudrait à un seul réservoir 49464 mèt. cub. de volume. Mais deux réservoirs, de 24732 mèt. cub. de volume chacun, seront préférables pour les cas d'accidents.

Un réservoir de 24732 mèt. cub. de capacité pourra être construit en maçonnerie de moëllons ou de briques ordinaires, là où il ne se trouve point de rocs solides dans lesquels on pourrait creuser le bassin. La maçonnerie ordinaire et une voûte en briques d'une épaisseur suffisante pour en assurer la stabilité, sera sans doute assez solide pour résister à la pression de l'air, qui va ici de dehors en dedans. Egalement cette maçonnerie sera impénétrable à l'air. Les figures 11 et 12 représentent la forme qu'on pourrait donner aux réservoirs. Le diamètre de la voûte pourra être de 9,4 mèt., son épais-

seur de 9,4 decimètres. Alors la partie du milieu se trouvera avoir une longueur de 27 mèt. La masse de la maçonnerie dans tout le réservoir est de 1254 mèt. cub. Le prix du mètre cube de maçonnerie en briques est, à Berlin par ex., de 20 fr. environ. Supposant 24 fr., à cause des autres dépenses, de terrassement, du recrépissage des murs etc., nous aurons 30000 fr. pour un réservoir, et 60000 fr. pour les deux.

II. *Pour le cas de la compression de l'air.*

21.

Dans ce cas il faut introduire à chaque course $(1+\mu)p$ mèt. cub. d'air dans le tube de propulsion et $(1+\mu)\varepsilon p$ mèt. cub. pour ε courses. Pour obtenir ce résultat au moyen des réservoirs, il faut que l'air dans ces réservoirs soit comprimé à un plus haut degré que $1+\mu$, et à un degré tel qu'après avoir dépensé $(1+\mu)\varepsilon p$ mètres cub. d'air atm., la tension de l'air qui y reste ait encore la tension $1+\mu$ nécessaire à celui du tube de propulsion. Si donc l'on suppose que la machine pneumatique ait introduit dans le réservoir νb mèt. cub. atm., de sorte qu'il s'y trouve $(1+\nu)b$ mèt. cub., il faut que

$$48. \quad (1+\nu)b-(1+\mu)\varepsilon p = (1+\mu)b,$$

et cela donne $b(\nu-\mu)=(1+\mu)\varepsilon p$ et

$$49. \quad b = \frac{1+\mu}{\nu-\mu}\varepsilon p.$$

C'est là la capacité dont a besoin le réservoir pour pouvoir fournir l'air nécessaire à ε courses.

La maçonnerie est absolument impropre à un réservoir d'air *comprimé,* même d'une tension de $\frac{1}{2}$ atmosphère seulement. Car quelque bonne que soit une voûte pour résister à une pression de dehors en dedans, elle est très impuissante à résister à une pression, même faible, de dedans en dehors. La pression d'une demi-atmosphère seulement équivaut déjà à une force de 5000 kilogr. par mètre carré (15), et la voûte devrait avoir près de 3 mètres d'épaisseur pour n'être pas soulévée ou crevée par la pression. Donc s'il ne se trouve pas des rocs solides pour y creuser les réservoirs, il n'y a que le *fer* qui y soit propre.

Le volume nécessaire aux réservoirs, comme le fait voir (49), est d'autant moindre que la compression de l'air est plus forte. A la rigueur, il faut seulement que ν soit plus grand que μ, et il est d'ailleurs évident que toute compression *superflue* cause une *perte* de force; parceque l'air comprimé

dans le réservoir se *dilate* en entrant dans le tube de propulsion. Donc si l'on voulait comprimer l'air dans le réservoir à un plus haut degré que de nécessité, ce ne serait que dans le but d'avoir des réservoirs moins grands. La perte de force peut, à la vérité, être plus ou moins compensée par l'économie que présenteraient alors les frais de construction des réservoirs, mais il s'agit ici de la proportion qui est la meilleure. D'abord il est bon d'observer que le montant des dépenses de construction peut être *amortisé,* tandis que celles de la production d'un surplus de force durent toujours. Donc déjà par cette seule raison, on fera bien de fixer la tension ν de l'air dans le réservoir à un degré aussi faible que possible, et d'augmenter plutôt la grandeur des réservoirs.

Puisque par cette raison, il est bon d'avoir des *grands* réservoirs, la tôle laminée y sera plus propre que la fonte; et puis *plusieurs* réservoirs d'une grandeur médiocre, tant à cause de la plus grande facilité de construction. qu'à cause des accidents d'explosion, seront préférables à un seul bassin dont la grandeur devrait être énorme. Nous supposerons que les réservoirs doivent avoir la forme de cylindre, avec des demi-sphères aux deux extrémités, et qu'ils doivent être en tôle de fer d'une épaisseur de 2,18 millim. (1 ligne. mesure de Prusse). Alors les deux parois du cylindre présenteront une aire de 43,6 centim. carrés par mètre de longueur du tuyau, et comme la cohésion du fer est 4794,6 kilogr. par centim. carré, la tôle résistera à la pression de l'air avec une force de $43{,}6 \cdot 4794{,}6 = 209044$ kil. par mètre de longueur. Mais il faut que cette résistance soit au moins *triple* de la force expansive de l'air: donc cette force ne doit s'élever qu'à 69681 kilogr. La tension d'un fluide élastique enfermé dans un cylindre tend, comme on sait, à crever le cylindre, avec une force égale à la pression qu'elle exercerait sur un plan rectangulaire, dont la longueur est celle de l'axe du cylindre, et la largeur son diamètre. Donc en désignant ce diamètre par δ, la tension de l'air atmosphérique comme ci-dessus par σ: la pression de la tension de ν atmosphères est ici $= \nu\sigma\delta$ par mètre de longueur. Supposons que le cylindre doive avoir 1,883 mèt. (6 pieds de Prusse) de diamètre, cette pression est de $\nu \cdot 9418 \cdot 1{,}883 = 17030 \cdot \nu$ kilogr. et il faut donc que $17030 \cdot \nu$ soit $= 69681$, ce qui donne $\nu = 4$, d'où l'on voit que les parois en tôle de fer de l'épaisseur de 2,18 millim. données à un cylindre de 1,88 mèt. de diamètre peuvent résister à une pression d'environ 4 atmosphères, et cette résistance suffira ici. Supposant $= l$ la longueur du cylindre, les demi-sphères aux extrémités y comprises:

50. $\begin{cases} 1. & \frac{1}{4}\pi\delta^2(l-\delta)+\frac{1}{6}\pi\delta^3 = \frac{1}{12}\pi\delta^2(3l-\delta) \text{ est son volume et} \\ 2. & \pi\delta\,(l-\delta)+\pi\delta^2 = \pi\delta l \text{ sa surface.} \end{cases}$

Pour $l = 6{,}27$ mèt. (20 pieds), le volume est de 15,736 mèt. cub. et la surface de 37,13 mèt. car. Le poids d'un mèt. carré de tôle de 2,18 mill. d'épaisseur est d'environ 19 kilogr., et le kilogr. coûte, le travail et les rivets y compris, 2 fr., donc le mètre carré de surface revient à 38 fr., et le cylindre à 1410 fr.; soit 1500 fr. On trouvera le nombre des cylindres nécessaires, si l'on divise par 37,13 les valeurs de b (49) calculées pour les différents ν.

Cela donne, en supposant comme ci-dessus $\mu = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 2$ et $p = 8244$ (46), les résultats suivants:

		Valeurs de b.		Nombre des cylindres.	Frais.
15.	Pour $\nu = 2$	1648,8	mèt. cub.	105	157 500 fr.
	- $\nu = 2\frac{1}{2}$	1236,6	- -	79	118 500 -
	- $\nu = 3$	949,3	- -	63	94 500 -
	- $\nu = 3\frac{1}{2}$	824,4	- -	53	79 500 -

La force nécessaire des machines pneumatiques et leurs frais, augmentent donc à mesure que le nombre des cylindres et leurs frais diminuent. Les résultats du calcul des effets des *machines* apprendront laquelle des valeurs de ν est la plus avantageuse.

Machines pneumatiques pour le service des réservoirs.

Premier cas. Machines pour la raréfaction de l'air dans le tube de propulsion et dans les réservoirs.

22.

A. Suivant (§. 16. *C.* 14.) le moment de la force nécessaire pour réduire par n coups de piston (chacun de k mètres cubes de volume) la tension $1-\lambda$ (ici $1-\mu$) de l'air dans un bassin du volume p (ici b) à la tension $1-\mu$ (ici $1-\nu$) est

$$52. \quad M_1 = \sigma[kn - b(\nu-\mu)],$$

et suivant (6 et 7) on a

$$53. \quad k = \left(1-\sqrt[n]{\left(\frac{1-\nu}{1-\mu}\right)}\right)b \text{ et}$$

$$54. \quad n = \frac{\log(1-\mu)-\log(1-\nu)}{\log b - \log(b-k)}.$$

Par (53) on voit que k est d'autant plus petit que n est plus grand, et que par conséquent le corps de pompe k peut être d'autant plus petit que

les coups du piston sont plus fréquents. Les quantités k et n sont arbitraires dans de certaines limites techniques. Il s'agit donc de trouver la valeur de k qui, avec celle de n y relative, donne le plus petit moment possible M_1.

B. Seulement, le premier terme kn de l'expression de M_1 (52) dépend de k et n, et dans l'expression de n (54) le dénominateur seul de la fraction dépend de k. Il ne s'agit donc que de chercher quelle est la valeur de k dans kn qui en (54) donne

$$55. \quad \frac{k}{\log b - \log(b-k)} = \text{min.}$$

La première différentiation de (55) donne

$$56. \quad \frac{1}{\log b - \log(b-k)} - \frac{k}{(\log b - \log(b-k))^2} \cdot \frac{1}{b-k} = 0,$$

et de là on tire

$$57. \quad \log b - \log(b-k) = \frac{k}{b-k} = \log \frac{b}{b-k}.$$

Cette équation déterminera k. Supposant $\frac{k}{b-k} = x$, on a $\frac{b}{b-k} = \frac{b+k-k}{b-k}$ $= 1 + \frac{k}{b-k} = 1 + x$, donc (57) se change en

$$58. \quad \log(1+x) = x.$$

Il n'existe que la valeur ***zéro*** de x qui satisfait cette équation. Mais il reste encore à savoir si cette valeur donne un ***maximum*** ou un ***minimum***. Différentiant de nouveau (56) on trouve

$$59. \quad \frac{(k-2b)(\log b - \log(b-k)) + 2k}{(b-k)^2 (\log b - \log(b-k))^3},$$

et en y mettant la valeur de $\log b - \log(b-k)$ (57),

$$60. \quad \frac{(k-2b)\frac{k}{b-k} + 2k}{(b-k)^2 \frac{k^3}{(b-k)^3}} = -\frac{1}{k}.$$

La différentielle de kn du second ordre est donc toujours ***négative***, et par conséquent la valeur 0 de k donne un ***maximum***, et non pas un ***minimum***; et puisqu'il n'existe qu'une seule valeur de k, il n'existe point de minimum, et il ne résulte de ces calculs que la préférence des corps de pompe ***grands*** aux ***petits***.

C. Le ***temps*** destiné à l'épuisement de l'air est ***déterminé***, et la ***vitesse*** du mouvement de la pompe est principalement soumise aux exigences de la pratique. On aura donc à fixer arbitrairement la valeur de n, mais on la

supposera aussi petite que possible, pour donner à k une valeur aussi grande que possible; puis on aura pour trouver k l'expression

61. $b-k = b\sqrt[n]{\left(\frac{1-\nu}{1-\mu}\right)}$ (6), ou bien aussi celle-ci:

62. $\log(b-k) = \log b + \frac{1}{n}[\log(1-\nu) - \log(1-\mu)]$.

D. Avant de passer à l'application de ces formules à l'exemple ci-dessus, il y a encore à faire la remarque suivante.

Les réservoirs doivent faire leur service pour plusieurs courses, avant que d'être vidés de nouveau: dans l'exemple ci-dessus pour *deux* courses, et il doit être établi *deux* réservoirs. Il y a donc deux manières différentes de se servir des réservoirs. On peut laisser entrer l'air du tube de propulsion toujours dans le même réservoir, de sorte que l'autre n'est qu'un bassin de *réserve*, dans lequel l'air conserve toujours la même tension, et que la réduction de la tension de l'air de $1-\mu$ à $1-\nu$ n'est opérée que toujours dans le *même* réservoir: ou bien, on peut laisser entrer l'air du tube de propulsion à moitié dans l'un et à moitié dans l'autre des deux réservoirs, de sorte que la pompe agit toujours sur les deux réservoirs en même temps, et y réduit la tension de l'air de $1-\frac{1}{2}(\mu+\nu)$ à $(1-\nu)$. Ces deux cas seront à apprécier, et nous venons maintenant à l'exemple

E. Supposons 12 courses à faire par jour sur le chemin de fer, 6 pour l'aller, et 6 pour le retour. C'est déjà beaucoup, car il y a des chemins de fer, où l'on ne fait par jour que 6 courses, et même 4 seulement. Nous supposons le cas le plus défavorable pour les réservoirs, savoir que les courses n'auront pas lieu pendant la nuit, et que sur tous les points de la route, le temps des courses ne devra être que de 12 heures. Alors le tube de propulsion aura à exercer sa force 12 fois par jour, et par conséquent l'air y devra être raréfié en moyenne pendant une heure. Il n'est pas de rigueur ici, que les intervalles des courses soient précisément d'une heure. Ils peuvent être inégaux, et aller même jusqu'à deux heures, puisque les réservoirs sont suffisants pour deux courses.

F. Supposons que la pompe, à-peu-près comme celle de Dublin, donne 20 coups par minute. Alors on a

63. $n = 60 \cdot 20 = 1200$.

Dans le *premier* des deux cas (*D*), où la pompe doit tirer l'air toujours du *même* réservoir, on a dans l'exemple (20) $b = 2473{,}2$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{5}{6}$,

et la formule (62) donne

64. $k = 2{,}164$ mèt. cub.,

la formule (52) donne

65. $M_1 = 16647257.$

Dans le *second* cas, où la pompe doit agir sur les *deux* réservoirs, on a $b = 4946{,}4$, $\mu = \frac{2}{3}$, $\nu = \frac{5}{6}$ et suivant (62 et 52)

66. $k = 2{,}566$ mèt. cub. et

67. $M_1 = 21235706.$

Donc pour le premier cas, le corps de pompe peut être moins grand, et le moment de force est également moindre que dans le second cas. Il est donc préférable de faire agir la pompe sur le *même* réservoir, bien que dans le second cas, où la machine agit sur les deux réservoirs, elle fonctionne sous des pressions moins variables. L'inégalité de la résistance qu'elle éprouve doit être égalisée par la disposition de la machine, par les volants etc. Nous adoptons donc le premier des deux systèmes, savoir de faire agir la machine toujours sur un seul réservoir, en gardant l'autre en réserve.

G. Le nombre de chevaux est ici suivant (18)

$$68. \quad m_1 = \frac{M_1}{\varphi\tau}.$$

Le nombre τ des secondes, pendant lesquelles la raréfaction de l'air doit être effectuée est

$$69. \quad \tau = 60 \cdot 60 = 3600.$$

Cela donne en vertu de (65 et 68)

$$70. \quad m = 78.$$

Donc on aura besoin ici d'une machine de la force de $78 + \frac{1}{10} \cdot 78 = 86$ chevaux, ou plutôt de deux machines de 43 chevaux chacune, et d'un corps de pompe de 2,164 mèt. cub. de volume, ou, ce qui vaut mieux, de deux corps de pompe de 1,082 mèt. cub. de volume chacun, donnant 20 coups de piston par minute.

Second cas. Machines pour la compression de l'air dans le tube de propulsion et dans les réservoirs.

23.

A. Chaque coup de piston de la machine pneumatique introduit k mèt. cub. d'air atm. dans les réservoirs dont la capacité est de b mèt. cub. Supposons $= 1 + \lambda$ la tension de l'air dans les réservoirs, *avant* le commencement

de la compression, de sorte qu'il s'y trouve déjà $(1+\lambda)b$ mèt. cub. d'air atm., et $=1+\nu$ la tension de l'air qui doit être produite par n coups de piston de la pompe. Alors il faut que

$$71. \quad (1+\lambda)b+nk=(1+\nu)b,$$

et cela donne

$$72. \quad n=(\nu-\lambda)\frac{b}{k}.$$

B. *Après* le xme coup de piston, il se trouvera $(1+\lambda)b+xk$ mèt. cub. d'air atm. dans les réservoirs, dont la tension sera $\frac{(1+\lambda)b+xk}{b}=1+\lambda+x\cdot\frac{k}{b}$. *Avant* le xme coup de piston, la tension n'est que de $1+\lambda+(x-1)\cdot\frac{k}{b}$, donc la tension moyenne est de $1+\lambda+(x-\frac{1}{2})\frac{x}{b}$, et la force qui agit sur le piston de dedans en dehors est $=\varkappa\sigma\left(1+\lambda+(x-\frac{1}{2})\frac{x}{b}\right)$, tandis que celle qui agit de dehors en dedans est $=\varkappa\sigma$. Donc la force nécessaire pour faire descendre le piston à l'xme coup de piston est

$$73. \quad =\varkappa\sigma\left(\lambda+(x-\tfrac{1}{2})\frac{x}{b}\right) \text{ kilogr.}$$

Désignant maintenant, comme dans (§. 16. *C.*), par h la hauteur de la course du piston, de sorte que $h\varkappa=k$, par v la vitesse du piston, et par t la durée d'un coup, de sorte que $vt=h$, l'expression (73), multipliée par v, donne *le moment de la force pour une seconde*, et multipliée par $vt=h$, *le moment de la force pour un coup de piston.* Le dernier est donc, $h\varkappa$ étant $=k$,

$$74. \quad =k\sigma\left(\lambda+(x-\tfrac{1}{2})\frac{k}{b}\right).$$

Cette formule, en y donnant à x successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots. n$ et en prenant la somme des résultats, donnera *le moment entier* que nous désignerons par N. On obtiendra

$$75. \quad N=k\sigma\left[n\lambda+(\tfrac{1}{2}n(n+1)-\tfrac{1}{2}n)\frac{k}{b}\right]=nk\sigma\left(\lambda+\frac{nk}{2b}\right),$$

et en y mettant la valeur de n (72),

$$76. \quad N=\sigma(\nu-\lambda)b(\lambda+\tfrac{1}{2}(\nu-\lambda))=\tfrac{1}{2}\sigma b(\nu^2-\lambda^2).$$

C. Ici se présente la même question que dans (§. 22.), celle de savoir si, dans le cas où, comme ci-dessus le double du volume des réservoirs est disponible, il vaut mieux laisser descendre à chaque course la tension de l'air contenu dans *la moitié* des réservoirs jusqu'à $1+\mu$, ou bien de ne laisser

descendre la tension de l'air de la *totalité* des réservoirs que jusqu'à la tension de $1+\frac{1}{2}(\mu+\nu)$.

Pour le premier cas, il faudra d'abord mettre dans (76) $\lambda=\mu$, $\frac{1}{2}b$ au lieu de b, et puis $\lambda=\frac{1}{2}(\mu+\nu)$. Donc on a:

77. $N=\frac{1}{4}\sigma b(\nu-\mu)(\nu+\mu)$ pour le premier cas et

78. $N=\frac{1}{4}\sigma b(\nu-\mu)(\frac{3}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)$ pour le second.

Or $\frac{3}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$ est toujours plus grand que $\nu+\mu$, car l'inéquation $\frac{3}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu>\nu+\mu$ donne $\nu>\mu$, ce qui a toujours lieu. Donc la premiere des deux dispositions est la meilleure.

D. On a donc pour $\lambda=\mu$, en mettant $\frac{1}{2}b$ à la place de b,

79. $N=\frac{1}{4}\sigma b(\nu-\mu)(\nu+\mu)$.

En substituant ici la valeur de b (49), on obtient

80. $N=\frac{1}{4}\sigma\frac{1+\mu}{\nu-\mu}\varepsilon p(\nu-\mu)(\nu+\mu)=\frac{1}{4}\sigma\varepsilon p(1+\mu)(\nu+\mu)$.

En désignant comme (§. 17. ***B.***) par t le nombre des secondes et par m_2 le nombre des chevaux, de sorte que

81. $m_2 t\varphi=N$,

on obtient

82. $m_2=\frac{\sigma(1+\mu)(\nu+\mu)\varepsilon p}{t\varphi}$.

E. Cette expression fait voir que, comme nous l'avons dit §. 21, la force de la machine doit être d'autant plus grande que ν l'est, si pour diminuer le volume des réservoirs on veut y comprimer plus fortement l'air. On pourra maintenant fixer la valeur de ν la plus avantageuse.

Supposons comme ci-dessus $p=824{,}4$ mèt. cub. (46); $\mu=\frac{1}{2}$; $t=3600$ (69), la formule (82) donne

83. $m_2=27\frac{1}{2}(\nu+\frac{1}{2})$.

Donc pour $\nu=2$, $2\frac{1}{2}$, 3 et $3\frac{1}{2}$, le nombre de chevaux nécessaires, y compris un surplus de 10 pour cent, est $m_2=76$, 91, 106 et 121. Les machines, avec ces forces, ou plutôt deux machines ayant chacune la moitié de la force, coûteront 71 250, 86 250, 97 500 et 105 000 fr. Donc le résultat, y compris celui (51), est le suivant:

84.

	Volume des réservoirs.	Nombres des cylindres.	Frais des cylindres.	Frais des machines à vapeur.	Totaux des frais.
Pour $\nu=2$	1648,8	105	157 500 fr.	71 250 fr.	228 750 fr.
– $\nu=2\frac{1}{2}$	1236,6	79	118 500 –	86 250 –	204 750 –
– $\nu=3$	949,3	63	94 500 –	97 500 –	192 000 –
– $\nu=3\frac{1}{2}$	824,4	53	79 500 –	105 000 –	184 500 –

D'après ces résultats, le total des frais d'établissement serait le moindre pour la tension la plus forte $\nu = 3\frac{1}{2}$. Mais l'économie de 228750 — 184500 = 44250 fr. est trop peu considérable, pour n'être point amplement compensée par l'excédant des dépenses du chauffage que demandent à perpétuité les machines plus fortes. Il sera donc mieux de fixer la tension de l'air à $\nu = 2$, au lieu de ν plus grand.

F. Les formules (72 et 84) donnent le volume k du corps de pompe nécessaire pour $\nu = 2$ et $n = 1200$ (63). On obtient

85. $k = 1{,}03$ mèt. cub.

Donc il faut ici deux machines à vapeur de la force de 38 chevaux chacune, et un corps de pompe de 1,03 mèt. cub. de volume dans lequel le piston donne 20 coups par minute.

Comparaison des deux dispositions, avec et sans réservoirs.

a. Premier cas. Raréfaction de l'air.

24.

Les paragraphes 22 et 23 présentent les calculs à faire pour un tube de propulsion de 7532,4 mèt. de longueur et de 0,366 mèt. de diamètre, et pour *le cas de réservoirs.* Pour comparer les résultats de ces calculs avec ceux du cas où des *réservoirs* n'existent pas, il faut encore calculer ces résultats. A la vérité ils ont été déjà calculés pour le tuyau de ***Dublin***, mais non pas encore pour le tuyau supposé ici.

A. Suivant (10), pour épuiser du tube l'air qui y est resté encore après l'épuisement partiel qui a préparé la course du train, il faut que la machine pneumatique donne

86. $$n = \frac{p}{k}$$

coups de piston *pendant* la course des wagons.

Il est vrai qu'ordinairement on ne marchera qu'avec une vitesse de 8,37 mèt. par seconde (4 milles de Prusse par heure), mais il faut que la disposition des machines soit telle qu'une plus grande vitesse soit possible, de 16,74 mèt. par sec. au moins, comme à Dublin. Dans ce but, il faut que le reste de l'air puisse être épuisé en $\frac{1}{8}$ d'heure ou $7\frac{1}{2}$ minutes, c'est-à-dire par 150 coups de piston de la pompe, si on lui suppose comme ci-dessus 20 coups par minute. Donc n dans (86) est = 150, et cela donne, p étant

$= 821{,}3$ mèt. cub. (§. 20),

$$87. \quad k = \frac{p}{n} = 5{,}5;$$

donc il faut que le corps de pompe ait 5,5 mèt. cub. de volume, ou plutôt que deux pompes en aient 2,75 mèt. cub. chacune.

Cela substitué dans (9.) donne

$$88. \quad n = \frac{-\log \frac{1}{2}}{\log 821{,}3 - \log 815{,}8} = 103,$$

de sorte que la machine pneumatique opérera par 103 coups de piston, et par suite en $\frac{103}{20} = 5$ minutes l'épuisement partiel qu'elle doit effectuer *avant* le départ des wagons.

B. Le nombre de chevaux nécessaires pour cet épuisement est suivant (20.)

$$89. \quad m_1 = \frac{\sigma}{\varphi \tau}(kn - p\mu).$$

Comme cet épuisement doit être opéré suivant (88) par 103 coups de piston, chacun de 3 sec., on a ici $\tau = 3 \cdot 103 = 309$. Puis on a $n = 103$ (88), $k = 5{,}5$ (87), $p = 821{,}3$ et $\mu = \frac{1}{2}$. Ces valeurs, ainsi que celles de σ (15) et φ (16), étant substituées dans (89), donnent

$$90. \quad m_1 = 70;$$

donc $70 + 0{,}1 \cdot 70 = 77$ chevaux sont nécessaires pour l'épuisement de l'air *avant* le départ du train.

C. Le nombre de chevaux nécessaires pour l'épuisement de l'air *pendant* la course du train est suivant (30)

$$91. \quad m_2 = \frac{\sigma \mu p}{t \varphi},$$

et t est ici $= 7\frac{1}{2}$ min. $= 450$ sec. Cela donne

92. $m_2 = 147$, et y ajouté 10 pour cent, $m_2 = 162$.

D. Donc pour pouvoir effectuer l'épuisement de l'air du tube de manière qu'une vitesse du train de 16,74 mèt. par sec. (8 milles de Prusse par heure) soit possible, dans le cas où *il n'existe pas des réservoirs,* il faut deux machines à vapeur de la force de 81 chevaux chacune, et deux machines pneumatiques chacune avec un corps de pompe de 2,75 mèt. cub. de volume. Les deux machines à vapeur coûteront environ 124 000 fr.

Dans le *cas de réservoirs,* deux machines à vapeur de la force de 43 chevaux chacune, et deux machines pneumatiques ayant chacune un corps

de pompe de 1,082 mèt. cub. étaient nécessaires suivant (70). Le prix de ces deux machines sera d'environ 71 000 fr. Les réservoirs coûteront suivant (§. 20) 60 000 fr. Cette somme de 131 000 fr. ne dépasse celle ci-dessus que de 7000 fr., et ces 7000 fr. pourront déjà être économisés par la grandeur moindre des machines pneumatiques, de sorte que la disposition *avec* réservoirs ne coûtera pas plus que celle *sans* réservoirs. Les frais de l'exploitation ne seront pas plus forts non plus, parceque le chauffage des machines plus faibles pendant 12 heures, ne coûtera pas davantage que celui des machines plus fortes pendant 12 minutes, pour chacune des 12 courses, ce qui exigera au moins un chauffage de 5 heures. Donc on obtiendra les avantages des réservoirs mentionnés §. 19 sans pertes, et par conséquent l'emploi des réservoirs présentera des avantages incontestables.

b. Second cas. Compression de l'air.

25.

A. Ici la grandeur nécessaire du corps de pompe est, suivant (34)

$$93. \quad k = (1+\mu)\frac{p}{n},$$

parceque l'air doit être épuisé *pendant* la course des wagons par n coups de piston, n étant ici $= 150$, suivant (§. 24. I.) (93), donc

$$94. \quad k = 8{,}25.$$

Donc il faut avoir ici deux corps de pompe, chacun de 4,13 mèt. cubes de volume.

B. La formule (39) donne le nombre m_2 des chevaux nécessaires, et la course du train devant être faite en $7\frac{1}{2}$ min., de sorte que $t = 7\frac{1}{2} \cdot 60 = 450$ sec., on trouve

$$95. \quad m_2 = \frac{\sigma\mu(1+\mu)p}{t\varphi} = 220,$$ et en y ajoutant 10 pour cent, $m_2 = 242$ chevaux.

C. Donc *sans* réservoirs, il faut deux machines à vapeur de la force de 121 chevaux chacune, et deux corps de pompe de 4,13 mèt. cub. chacun. Les deux machines à vapeur coûteront environ 161 000 fr.

Avec réservoirs, deux machines à vapeur de la force de 38 chevaux chacune, et 105 réservoirs de 1648,8 mèt. cub. de volume étaient nécessaires suivant §. 23, et coûteraient ensemble 228 750 fr.; mais il suffisait de deux corps de pompe de 1,082 mèt. cub. de volume chacun.

A la vérité, on n'économisera ici par les pompes plus faibles qu'une partie de la somme de 67 750 fr. que coûtent en plus les réservoirs, et le chauffage

des deux machines de la force de 38 chevaux pendant 12 heures, ne coûtera pas moins non plus que celui des deux machines de la force de 121 chevaux pendant 12 fois $7\frac{1}{2}$ min. ou $1\frac{1}{2}$ heure: cependant le surplus de dépense est relativement beaucoup trop faible, pour qu'il puisse faire regretter de payer trop cher les avantages des réservoirs; donc aussi, dans le second cas, savoir dans celui de la *compression* de l'air, les réservoirs seront avantageux.

Remarque. Nous ne devons pas omettre ici une circonstance qui se rapporte à la *vitesse* de la course du train, qui n'a pas été encore prise en considération dans les calculs ci-dessus. Une force *dynamique* est encore nécessaire pour *engendrer* la vitesse, et cette force ne sera calculée que plus bas. Mais ici, où nous n'avions à faire qu'une *comparaison* des résultats pour les deux cas de l'existence et de l'absence des réservoirs, il ne s'agissait pas de cette force dynamique, parcequ'elle est la même dans les deux cas, et qu'elle peut être regardée comme comprise dans la force du piston de propulsion.

26.

C'est ici l'occasion de parler plus en détail du *quatrième* avantage des réservoirs, mentionnés §. 19, avantage qui ne pouvait être mis dans tout son jour avant d'avoir établi les principes et les formules nécessaires.

A. D'abord, si dans le *premier* cas, celui de la *raréfaction* de l'air dans le tube de propulsion, on a épuisé des réservoirs, dont le volume est

$$96. \quad b = \frac{p}{\nu - \mu},$$

νb mèt. cub. d'air atmosphérique, le robinet du tuyau de communication entre les réservoirs et le tube de propulsion, doit être ouvert jusqu'à ce que μp mèt. cub. d'air atm. soient passés du tube de propulsion dans les réservoirs. Alors la tension de l'air dans le tube de propulsion sera baissée par là jusqu'à la tension de $1-\mu$ atm., et le piston aura la force de μ atm., force nécessaire pour le commencement du trajet. Après cela, seulement au *moyen du robinet,* on pourra faire passer le *reste* de l'air du tube de propulsion dans les réservoirs, à fur et à mesure que la force du piston de propulsion devra rester constante, ou être augmentée ou diminuée. Cela *sans* réservoirs, ne pourrait être effectué pendant le trajet que par les machines pneumatiques mêmes; ce qui est beaucoup plus difficile. Voilà le *troisième* avantages des réservoirs, énumérés §. 19.

Mais il peut se présenter le cas où, au *commencement* du trajet, le piston de propulsion ait besoin d'une force *plus grande* que μ atm. C'est le cas

où, au point de départ, on ne peut pas donner à la voie une pente telle que la *gravité* produise la force dynamique nécessaire pour ***engendrer*** la vitesse, ou le cas où la route, au point de départ du train, monte au lieu de descendre. Si, dans ces cas, il n'existe pas de réservoirs, l'augmentation nécessaire de la force du piston ne peut être produite que par une raréfaction plus forte de l'air dans le tube, et pour cela les machines à vapeur qui mettent les pompes en mouvement doivent travailler plus longtemps. Il est vrai que si les machines ont épuisé du tube plus de μp mèt. cub. d'air ***avant*** le trajet, il leur restera moins d'air à épuiser ***pendant*** la course des wagons, mais néanmoins il leur faut encore la ***même*** force. Car aussitôt que pendant la course, la résistance des wagons diminue, ils devanceront l'épuisement jusqu'au rétablissement de la tension normale de l'air dans le tube, et il faut toujours aux machines la force nécessaire pour faire face à la résistance normale. Toutefois donc on a besoin d'un ***supplément*** de force pour produire une propulsion supérieure à la force normale.

Avec des réservoirs au contraire, il n'y a qu'à ***prolonger*** l'ouverture du robinet pour produire l'augmentation de la force dont le piston de propulsion peut avoir besoin, et on obtiendra cette augmentation sans épuisement ***additionnel*** des réservoirs, car toutefois il faut seulement que les réservoirs puissent recevoir tout l'air du tube de propulsion, sans que par là, la tension de l'air qu'ils contiennent dépasse la limite μ. D'ailleurs l'augmentation de force qu'on peut obtenir par ce procédé est assez ***considérable***. Voici comment.

Le tube de propulsion renferme p mèt. cub. d'air atm., les réservoirs en contiennent encore $(1-\nu)b$ mèt. cub. après l'épuisement préparatoire. Si on laisse se repandre ces $p+(1-\nu)b$ mèt. cub. d'air atm. dans les volumes *combinés* des réservoirs et du tuyau, l'air raréfié par là n'aura plus que la tension

$$97. \qquad 1-x = \frac{p+(1-\nu)b}{p+b}.$$

Cela donne

$$98. \qquad x = \frac{\nu b}{p+b} = \frac{\nu}{1+\frac{p}{b}}.$$

Mais on a pour une seule course $b = \frac{p}{\nu-\mu}$ (44) d'ou $\frac{p}{b} = \nu-\mu$, et cela substitué dans (98) donne

$$99. \qquad x = \frac{\nu}{1+\nu-\mu} \text{ atm.}$$

Telle est la force qu'on peut donner au piston de propulsion avant le départ du train, et cela seulement au moyen de la prolongation de la durée de l'ouverture du robinet, sans addition aucune au travail des machines à vapeur. Dans l'exemple ci-dessus nous avons supposé $\nu = \frac{5}{6}$ et $\mu = \frac{1}{2}$. Cela donne $x = \frac{5}{8}$, et cet x est d'un ***quart*** plus grand que $\mu = \frac{1}{2}$. Une telle augmentation de la force peut être très-utile dans les cas difficiles. ***Pendant*** le trajet il n'y a pas de pertes. Veut-on diminuer la force de propulsion, il n'y a qu'à fermer proportionnellement le robinet.

B. Dans le ***second*** cas, où l'air doit être ***comprimé,*** il est évident que si des réservoirs n'existent pas, et qu'au moment du départ ou veuille donner une plus grande force au piston de propulsion, il faudra mettre en action une force plus considérable des ***machines.*** Si au contraire, il existe des réservoirs, dans lesquels l'air soit comprimé à une plus forte tension que celle exigée par la propulsion, comme cela doit être, il n'y aura qu'à ouvrir un peu plus le robinet du tube de communication. Dans le cas ci-dessus, où l'on a supposé $\nu = 2$, la force de propulsion $\mu = \frac{1}{2}$ peut être augmentée par ce moyen jusqu'à $\nu = 2$, c'est-à-dire qu'elle peut être ***quadruplée.***

Ainsi donc, sous ce point de vue aussi, les réservoirs sont avantageux.

Il est vrai que les résultats de la comparaison des effets des deux dispositions, ***avec*** et ***sans*** réservoirs, seront considérablement modifiés suivant les circonstances, par ex., si une force plus grande ou plus faible du piston de propulsion est nécessaire, et par conséquent un tube de propulsion plus grand ou plus petit mais les résultats pourront toujours être calculés d'après les formules ci-dessus, et on trouvera toujours, au moins pour les cas ordinaires, que l'adoption de réservoirs est à recommander.

Système N°. III §. 4 avec un tube de propulsion sans rainure, et enflé dévant une roue par de l'air comprimé.

27.

Ce système, quant à ce qui a rapport aux machines, est absolument conforme au système N°. II. Toutes les formules et remarques ci-dessus y relatives, conviennent donc également au système N°. III. Mais il s'agit de savoir si l'air comprimé jusqu'à la tension $1+\mu$ produit ici sur la roue ***R*** (fig. 7) le même effet que sur le piston de N°. II (le profil du tube de propulsion étant supposé le même dans les deux cas), ou si cet effet est autre.

Soit ***CFA*** (fig. 10) la roue, ***DFEA*** le tube de propulsion, $AM = x$, $MP = y$, l'arc $AP = s$, $CA = r$, $GA = h$. L'air agit sur ∂s, différentielle de l'arc s, avec la force $\mu \partial s$ dans une direction perpendiculaire à la tangente ***TQ***, car l'excédant μ de la tension $1 + \mu$ de l'air dans le tube sur celle 1 de l'atmosphère est la force effective de l'air. La force $\mu \partial s$ produit suivant la direction ***BP*** une force $\mu \partial s \cdot \frac{RN}{RP} = \mu \partial s \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \mu \partial x$, et suivant la direction ***NP*** une force $\mu \partial s \cdot \frac{NP}{RP} = \mu \partial s \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \mu \partial y$. La première force $\mu \partial x$ est la différentielle de celle qui pousse en avant la roue ***R***, et par conséquent le train des wagons, et cela dans leur propre direction: l'autre force $\mu \partial y$ est la différentielle de celle qui tend à soulever perpendiculairement la roue.

L'intégrale de $\mu \partial x$ est $\mu x +$ const., et comme elle est $= 0$ pour $x = 0$, de sorte que const. $= 0$, et qu'elle doit être prise pour $x = h$, l'intégrale totale est

$$100. \quad \mu h = \mu \cdot AG.$$

L'intégrale de $\mu \partial y$ est pareillement $\mu y +$ const., et elle est $= 0$ pour $y = 0$, de sorte que const. $= 0$. Comme elle doit être prise pour $y = FG = \sqrt{(2rh - h^2)}$, l'intégrale totale est

$$101. \quad \mu \sqrt{(2rh - h^2)} = \mu \cdot FG.$$

En multipliant encore (100 et 101) par la *largeur* du tube, on trouve, que la force de propulsion agissant sur la roue ***R***, et par conséquent sur le train de wagons, est égale à μ fois le profil du tube, et par suite parfaitement *égale* à celle que l'air comprimé produirait sur un *piston*. L'autre force qui tend à soulever la roue est μ fois le profil du tube multiplié par $\frac{FG}{GA}$. Cette force détermine le minimum du poids du wagon-conducteur. Donc l'air comprimé produit absolument le même effet sur la roue que sur un piston, si le profil du tube est le même dans les deux cas; et par conséquent le système N°. III, quant à ces *effets*, ne diffère en *rien* du système N°. II.

Supposons ci-dessus, dans la description du système N°. III. (§. 13.) le rayon r de la roue de propulsion, $= 7{,}84$ décim., la hauteur h du profil du tube, $= 1{,}57$ décim., on a $FG = \sqrt{(2rh - h^2)} = 4{,}7$ décim. et $\frac{FG}{GA} = \frac{4{,}7}{1{,}57} = 3$. Donc dans ce cas, la force qui tend à soulever la roue est *triple* de la force de propulsion. En tout cas cette force ne sera toujours qu'une très-faible partie du poids du wagon-conducteur, de sorte qu'elle ne peut être un obstacle à l'emploi du système: au contraire elle offre encore un certain avantage, celui d'*alléger* un peu, pour ainsi dire, le poids à transporter.

Effets de la force propulsive sur les wagons.

a. Force nécessaire pour le tirage des wagons.

28.

A. Soit le poids du train des wagons à transporter . . $= Q$ kilogr.

La partie de ce poids égale au frottement des roues des wagons sur les rails et dans leurs essieux, soit désignée par . nQ.

L'angle que fait la voie avec l'horizon . . . . . $= \beta$.

Si la route monte, β doit être pris ***positivement,*** et si elle descend, ***négativement.***

La force de traction nécessaire soit désignée par . . . $= Z$.

B. Le poids Q agit dans une direction perpendiculaire aux rails avec une force $Q\cos\beta$; donc le frottement que produit cette force et que la force Z est destinée à vaincre dans sa propre direction, est $= nQ\cos\beta$. Outre la force $nQ\cos\beta$, Z a encore à vaincre la résistance $Q\sin\beta$ que produit la gravité sur le plan incliné des rails. Donc il faut qu'en cas d'équilibre, Z soit $= nQ\cos\beta + Q\sin\beta$, ou bien

$$102. \qquad Z = Q(n + \operatorname{tang}\beta)\cos\beta.$$

La direction de la force Z est aussi celle de la force propulsive dans le tube. Le facteur $\cos\beta$ dans (102) sera toujours très-près de l'unité, même sur les plus fortes pentes de la voie, qui peuvent se présenter. Par ex., même pour une pente de 1 sur 25 ou pour $\operatorname{tang}\beta = 0{,}04$, on a déjà $\cos\beta = 0{,}9992$ ce qui ne diffère de l'unité que de $0{,}0008 = \frac{1}{1250}$. Pour une pente de 1 sur 40, $\cos\beta$ ne diffère de l'unité que d'un 3226me. Donc sans erreur sensible, on pourra toujours supposer $\cos\beta = 1$ et par là l'expression de Z (102) se réduit à

$$103. \qquad Z = Q(n + \operatorname{tang}\beta).$$

D'ailleurs on peut, si l'on veut, se servir aussi de l'expression (102).

b. Force nécessaire pour engendrer la vitesse.

29.

A. Une force *égale* à Z (103) ne suffirait pas encore pour mettre en ***mouvement*** le train des wagons, elle ferait seulement équilibre à leur résistance contre la force de traction de la machine. Il faut encore y ajouter une autre force pour produire le mouvement, et pour engendrer dans un certain laps de temps la vitesse que l'on désire obtenir.

B. Si pendant un temps déterminé de T secondes, on fesait agir une force additionnelle *constante,* cette force, semblable à celle de la *gravité,* produirait une vitesse *uniformément accélérée,* et il faudrait laisser agir cette force jusqu'à ce que la vitesse demandée fût produite. Mais on préférera peut-être de mettre d'abord le train aussi *promptement* que possible en mouvement, par ex. pendant le temps t, et de n'augmenter ensuite la vitesse que peu-à-peu. A cette fin, il faudrait que la force propulsive fût au maximum en commençant, et diminuât ensuite, par ex. uniformément, jusqu'à zéro.

C. Supposons la force *accélératrice* qu'on veut employer de cette manière pour engendrer la vitesse

$$104. \quad = q \cdot \frac{T-t}{T},$$

de sorte qu'elle est $= q$ pour $t = 0$ et *uniformément décroissante* pendant T secondes jusqu'à zéro. Cette force produit pendant la différentielle ∂t du temps t, la vitesse $\partial v = 2gq\frac{T-t}{T}\partial t$, g désignant la hauteur de 4,9 mèt. d'où tombe un corps dans le vide pendant la première seconde. Donc on a $v = 2gq\left(t - \frac{t^2}{2T}\right) +$ const., et comme $v = 0$ pour $t = 0$, et par suite const. $= 0$,

$$105. \quad v = 2gqt\left(1 - \frac{t}{2T}\right), \text{ et pour } t = T, \; v = gqT.$$

L'espace parcouru avec la vitesse v pendant le temps ∂t est $\partial x = v\partial t = 2gq\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)\partial t$, d'où l'on tire $x = gq\left(t^2 - \frac{t^3}{3T}\right) +$ const. et x étant $= 0$ pour $t = 0$ et par suite const. $= 0$, on a

$$106. \quad x = gqt^2\left(1 - \frac{t}{3T}\right) \text{ et pour } t = T, \; x = \tfrac{2}{3}gqT^2.$$

D. Si la force propulsive, au lieu d'être uniformément décroissante, était *constante,* on aurait $\partial v_1 = 2gq_1\partial t$, $v_1 = 2gq_1 t$ et à cause de const. $= 0$,

$$107. \quad v = 2gq_1 t \text{ et pour } t = T, \; v_1 = 2gq_1 T.$$

Puis $\partial x_1 = v_1\partial t = 2gq_1 t\partial t$, $x_1 = gq_1 t^2 +$ const. et à cause de const. $= 0$,

$$108. \quad x_1 = gq_1 t^2 \text{ et pour } t = T, \; x_1 = gq_1 T^2.$$

E. Le *moment* M d'une force est le produit de cette force par le temps, pendant lequel elle agit. Donc ce *moment* est dans le premier des deux cas ci-dessus égal à l'intégrale de $q\frac{T-t}{T}\partial t$, et dans le second cas égal à l'intégrale de $q\partial t$. Cela donne, const. étant $= 0$ dans les deux cas,

109. $M = q\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)$ et $M = \frac{1}{2} q T$ pour $t = T$ dans le *premier* cas, et

110. $M_1 = qt$ et $M_1 = q_1 T$ pour $t = T$ dans le *second* cas.

F. En supposant $q = 2q_1$, on a $M = M_1$ (109 et 110) et $v = v_1$ (105 und 107); mais $x = \frac{4}{3} x_1$ (106 et 108), donc la vitesse produite dans le temps T par la force *constante* q_1 est *la même* que celle produite dans ce même temps par la force *uniformément décroissante* depuis $2q_1$ jusqu'à zéro; les *moments* des deux forces sont également *les mêmes*, mais *l'espace* x, par lequel la force *variable* $2q_1$ a poussé le train des wagons dans le temps T, est d'un *tiers* plus grand que celui qu'il parcourrait, si la force *constante* q_1 le poussait. Donc la force *variable* $2q_1$, si l'on peut en disposer, serait plus avantageuse que la force *constante* q_1.

G. La force *accélératrice* décroissante est suivant (105)

$$111. \quad q = \frac{v}{gT}.$$

C'est la valeur qu'il faut à cette force au *départ du train*, si l'on veut qu'elle produise la vitesse v dans le temps T. Delà on tire pour la force *motrice*, qui doit agir sur la masse Q:

$$112. \quad 2K = qQ = \frac{vQ}{gT}.$$

Cela suffira, si une vitesse de 8,37 mètres par seconde est produite en 2 minutes; car alors en 3 min. on aura déjà gagné une vitesse de 12,56 mèt., en 4 min. une vitesse de 16,74 mèt. par seconde. Donc on peut supposer dans (112 et 106) $v = 8{,}37$ et $T = 2 \cdot 60 = 120$. Cela donne

$$113. \quad 2K = qQ = \frac{Q}{70} \text{ environ et}$$

$$114. \quad x = \tfrac{2}{3} g \cdot \frac{120^2}{70} = 673 \text{ mèt.}$$

Donc une force motrice, égale à la 70me partie du poids des wagons, et uniformément décroissante jusqu'à zéro, produit en 2 min. une vitesse de 8,37 mèt. par seconde, et fait parcourir dans ce temps au train de wagons une distance de 673 mèt.

H. Si l'on ne peut pas disposer d'une force aussi considérable, la *moitié* de la force produit encore également en 2 minutes la vitesse de 8,37 mèt., en la fesant agir *sans* diminution pendant les 2 minutes, mais la distance parcourue alors par les wagons n'est suivant (108) que

$$115. \quad x_1 = g \cdot \frac{120^2}{140} = 505 \text{ mèt.}$$

La différence de ces distances n'étant pas considérable, la force ***constante*** sera réellement préférable à la force double ***décroissante.***

I. ***Toute*** augmentation de la force Z (103) quelle qu'elle soit, produit à la fin la vitesse demandée, mais d'autant plus lentement qu'elle est plus faible. De (107) on tire

$$116. \qquad T = \frac{v_1}{2gq_1},$$

et c'est le temps nécessaire à la force accélératrice ***constante*** q pour produire la vitesse v_1. La distance parcourue dans le temps T est suivant (108) $x_1 = gq_1T$ ou, en substituant la valeur de T (116),

$$117. \qquad x_1 = gq_1\frac{v_1^2}{4g^2q_1^2} = \frac{v_1^2}{4gq_1}.$$

Si la vitesse v_1 avait ***déjà existé*** pendant le temps T, la distance x_1 eut été parcourue en

$$118. \qquad \frac{x_1}{v_1} = T_1 = \frac{v_1}{4gq_1} \text{ sec. (117).}$$

De (116 et 118) on tire

$$119. \qquad T - T_1 = \frac{v_1}{2gq_1} - \frac{v_1}{4gq_1} = \frac{v_1}{4gq_1}.$$

Voilà le temps ***perdu*** à la ***production*** de la vitesse v_1. Ce temps est d'autant plus considérable que q_1 est plus petit. Pour $q_1 = \frac{1}{140}$ et $v_1 = 8{,}37$ mèt. comme ci-dessus, on trouve $T - T_1$ (120) $= 60$ sec. $= 1$ min.; pour $q = \frac{1}{280}$, $T - T_1 = 2$ min.; pour $q_1 = \frac{1}{1000}$, $T - T_1 = 7{,}14$ min., ce qui déjà est trop. La force motrice q_1Q ne pourra donc convenablement être moindre que $\frac{Q}{280}$ ou $\frac{Q}{300}$.

K. Si la force propulsive de la machine peut être dirigée, diminuée et augmentée, exactement de manière, qu'elle soit toujours précisément égale à la résistance Z (100) du train sur tous les points de la route, on n'a besoin qu'une seule et unique fois de la force ***additionnelle*** $K = \frac{vQ}{2gT}$ (112), nécessaire pour engendrer la vitesse v en T secondes; et cela au départ du train. Cette vitesse, une fois obtenue, les wagons parcourront toute la route avec la même vitesse, et sans aucune nouvelle addition à la force Z. Si au contraire la force propulsive n'est pas variable de la même manière que Z, mais qu'elle soit plutôt constante, ce qui est généralement le cas des ***tubes de propulsion*** placés entre les rails, une augmentation ***réïtérée*** est nécessaire chaque fois que la vitesse a diminué par l'ascension des pentes.

c. Moment de la force de traction.

30.

A. Le produit d'une force motrice par l'espace parcouru, peut être regardé aussi comme un ***moment*** de cette force; supposé que la vitesse soit ***constante.*** Ce moment est la somme des ***forces des chevaux*** travaillant pendant la durée du mouvement, et donne par conséquent, divisé par le nombre des secondes et par le moment de la force d'un cheval relatif à une seconde, le ***nombre des chevaux*** qui produiraient l'effet demandé. Si la force motrice est Z, la longueur de la route $= L$, la durée du trajet $= t$ sec., le moment de la force d'un cheval par seconde comme ci-dessus $= \varphi$, et le nombre des chevaux $= m$, on a

$$120. \quad ZL = m\varphi t \quad \text{et} \quad m = \frac{ZL}{\varphi t}.$$

Soit par ex. $Z = 225$ kilogr., $L = 3766$ mèt., $t = 1$ h. $= 3600$ sec., φ étant $= 58{,}8$ (16), la formule (120) donne $m = 4$; donc 4 chevaux seraient nécessaires pour transporter un poids de 225 kilogr. à une distance de 3766 mèt. par heure. C'est ce que 4 chevaux sont capables d'effectuer *immédiatement,* car chaque cheval tire 56,2 kil. avec la vitesse de 1,046 mèt. par seconde. Si maintenant on veut que la même distance soit parcourue en ***moins*** de temps, les chevaux à la verité ne seront pas capables d'effectuer cela immédiatement, mais un plus grand nombre de chevaux le pourra faire dans un temps réciproquement proportionnel, si on leur fait mettre en mouvement une ***machine,*** propre à cet effet. Le produit ZL est toujours la somme des forces des chevaux, quel que soit le temps t pendant lequel ils travaillent. Ce produit est donc un ***véritable moment.***

B. Supposons maintenant $= \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots.$ les inclinaisons vers l'horizon des longueurs successives $L_1, L_2, L_3, \ldots.$ de la voie L, mesurées horizontalement, et $h_1, h_2, h_3, \ldots.$ les hauteurs perpendiculaires de ces rampes, on a

$$121. \quad L = L_1 + L_2 + L_3 \ldots. \quad \text{et}$$

$$122. \quad h_1 = L_1 \operatorname{tang} \beta_1, \quad h_2 = L_2 \operatorname{tang} \beta_2, \quad h_3 = L_3 \operatorname{tang} \beta_3, \quad \ldots.$$

Alors le ***moment*** (***A.***) de la force de traction Z (103) nécessaire pour vaincre la resistance des wagons sur la route, est $L_1 Q(n + \operatorname{tang} \beta_1)$ pour la distance L_1, $L_2 Q(n + \operatorname{tang} \beta_2)$ pour la distance L_2, $L_3 Q(n + \operatorname{tang} \beta_3)$ pour la distance L_3 etc. Donc en désignant par W la somme de ces moments, on a

$$123. \quad W = Q[nL_1 + nL_2 + nL_3 \ldots. + L_1 \operatorname{tang} \beta_1 + L_2 \operatorname{tang} \beta_2 + L_3 \operatorname{tang} \beta_3 \ldots.],$$

ou bien suivant (121 et 122),

$$124. \quad W = Q(L + h_1 + h_2 + h_3 \ldots.).$$

En prenant pour n la tangente d'un angle ζ, on a

$$125. \quad nL = L \operatorname{tang} \zeta = H,$$

et alors H est la hauteur que la route monterait encore ***en plus*** qu'elle ne le fait peut-être déjà, dans le cas où toutes ses pentes seraient plus grandes de l'angle ζ qu'elles ne le sont effectivement. Supposant encore

$$126. \quad h_1 + h_2 + h_3 \ldots. = H_1,$$

on a suivant (124)

$$127. \quad W = Q(H + H_1).$$

C. Comme H_1 (126) n'est autre chose que l'élévation perpendiculaire de l'une des deux *extrémités* de la route au dessus de l'autre, le moment de la traction, égale à la résistance des wagons (127), est celui de la force qui serait capable d'élever ***perpendiculairement tout le poids Q des wagons*** à la hauteur $H = Ln$, plus ou moins celle H_1 de l'extrémité de la route au dessus ou au dessous du point de départ, et cela dans le même *temps* pendant lequel les wagons doivent parcourir la route avec une vitesse ***constante.*** On suppose ici que la force de traction est toujours parfaitement égale à la résistance du train, et même que là où les pentes de la route sont si fortes que Z est ***négatif,*** les forces qu'y produit la gravité peuvent être utilisées et ajoutées à la force de traction. Si cette dernière condition ne peut pas être réalisée, il faut exclure les hauteurs ***négatives*** h_1, pour lesquelles $n + \operatorname{tang} \beta_1$ est ***négatif,*** et ne réserver que les autres h_1 ***négatives,*** pour lesquelles $n + \operatorname{tang} \beta_1$ est encore *positif.* Les hauteurs ***positives*** h_1 viennent toujours en calcul. S'il n'existe pas des pentes pour lesquelles $n + \operatorname{tang} \beta_1$ est ***négatif,*** le résultat (127) ne subit aucun changement.

D. La lettre n désigne suivant (§. 28. *A.*) la fraction par laquelle il y a à multiplier le poids Q du train pour trouver la résistance qu'il oppose à la traction sur une route ***horizontale.*** Suivant les expériences on peut supposer

$$128. \quad n = \tfrac{1}{250} = 0{,}004.$$

Cela donne en vertu de (124)

$$129. \quad W = Q\left(\frac{L}{250} + H_1\right) = Q(0{,}004L + H_1).$$

E. A ce moment W il faut encore ajouter celui de la ***force dynamique*** (§. 29), nécessaire pour engendrer la vitesse au moment du départ du

train. Mais ce moment étant le même dans les deux cas que nous allons comparer, il peut être mis de côté.

d. Comparaison des deux systèmes N^os^. I. et II.

31.

Généralement la pression de l'air sur les pistons dans les tubes de propulsion placés entre les rails, ne peut pas être instantanément modifiée et reglée suivant les besoins, c'est-à-dire suivant les différentes pentes de la route. Elle est toujours l'excédant μ de la pression de l'air sur les deux faces du piston.

Il est vrai que μ peut être diminué et augmenté par la diminution et par l'augmentation du travail des pompes, dans le cas où il n'existe pas des réservoirs, et dans le cas contraire par la diminution ou l'augmentation de l'ouverture du robinet dans le tuyau de communication entre le tube de propulsion et les réservoirs; mais cette variation de μ ne peut être produite que par le *machiniste des pompes* ou celui des réservoirs, et non point par le *conducteur du train.* Cependant c'est ce dernier seul qui peut juger si une diminution ou une augmentation de la force propulsive est *nécessaire.* On a proposé d'établir des télégraphes électriques pour donner au conducteur du train les moyens d'indiquer *instantanément* au machiniste des pompes ce qu'il a à faire. L'expérience apprendra si cet expédient est praticable. Mais même en admettant ce moyen, il resterait encore une difficulté beaucoup plus grande. Car bien que le conducteur des wagons ait le moyen de donner ses ordres au machiniste en un *clin d'oeil,* ce que ce dernier est capable de faire, savoir de diminuer ou d'augmenter l'épuisement ou l'introduction de l'air dans le tube, n'a pas également un *effet* instantané; il faudrait aussi que le conducteur des wagons pût *prévoir* ce qui sera nécessaire, et cela précisément pour un espace de temps, égal à celui dont les manoeuvres du machiniste ont besoin pour faire leurs effets. Mais il est peu probable que, surtout dans un mouvement rapide du train, une telle prévision soit possible au conducteur.

Donc une modification de la force propulsive, parfaitement conforme aux besoins, ne parait guère être possible pour les chemins de fer à tube de propulsion. Toutefois, et même le fût elle, il y aurait encore à craindre des *méprises* dans la correspondance entre le conducteur et le machiniste: méprises dont les suites pourraient être très-funestes. Il se pourrait qu'au lieu de la modération de la force, demandée par le conducteur, une augmentation fût don-

née, et réciproquement; et cela surtout dans les cas où, pour épargner les forts remblais et déblais, on a donné à la route beaucoup de pentes opposées. Alors au lieu d'accélérer la vitesse ou elle a trop diminuée, elle diminuerait encore davantage, et peut-être le train s'arrêterait-il tout-à-fait; et au lieu de diminuer une vitesse déjà trop grande, elle augmenterait encore et deviendrait dangereuse. Il parait donc, que tout ce qu'il y a à obtenir dans la pratique, et que le machiniste est ***capable*** de produire avec ***sureté,*** est une pression ***constante*** de l'air sur le piston de propulsion. Quand cette pression devient trop forte, il ne reste au conducteur qu'à la modérer par un enrayement des voitures.

Supposant donc ***constante*** la pression de l'air sur le piston, il est clair qu'elle doit encore suffire pour les pentes les ***plus raides*** de la voie. Il faut qu'elle soit telle, qu'avec cette pression, la course des wagons puisse être effectuée, quand même la plus forte pente de la route se prolongerait sur ***toute sa longueur***. Désignons par β_m l'inclinaison de la partie la plus raide de la route vers l'horizon et supposons

130. $\text{tang}\,\beta_m = n_m$,

le moment des forces propulsives nécessaires pour un chemin de fer à tube de propulsion placé entre les rails, moment que nous désignerons par W_1, est suivant (123)

$$W_1 = Q(nL_1 + nL_2 + nL_3 \ldots . + n_m L) \text{ ou bien}$$

131. $W_1 = LQ(n + n_m)$ où $n = 0{,}004$ (128).

Ce moment pourra surpasser de ***beaucoup*** celui W (127 ou 129) des forces ***effectivement*** nécessaires. Supposons par ex. une voie, dont les deux extrémités sont au dessus de l'horizon à une hauteur ***égale,*** la hauteur H_1 (129) est $= 0$ et

132. $W = LQn = 0{,}004\,LQ.$

Supposons maintenant la plus forte pente de la route $n_m = \frac{1}{100} = 0{,}01$, (131) donne

133. $W_1 = LQ(0{,}01 + 0{,}004) = 0{,}014\,LQ;$

Donc W_1 est $3\frac{1}{2}$ fois aussi fort que W (132), c'est-à-dire, il faut au piston du tube de propulsion un moment de forces $3\frac{1}{2}$ fois aussi grand qu'il ne serait, s'il était possible d'adapter à chaque moment la force du piston à la résistance des wagons. Donc sur ce point, les chemins de fer à tube de propulsion sont beaucoup moins avantageux que ceux, où le conducteur des wagons est à même de modérer ou d'augmenter la force propulsive suivant les besoins: comme cela est assez praticable par les locomotives à vapeur.

Le surplus de force propulsive ne peut pas être employé pour marcher ***plus vite.*** Il faut que la force nécessaire pour engendrer la vitesse soit disponible encore en sus de ce qui se trouve déjà en plus dans le tube, et si l'on voulait se servir du dernier pour accélérer encore la marche, la vitesse deviendrait dangereuse.

e. Diamètre du tube de propulsion.

32.

Soit δ le diamètre du tube de propulsion, la pression de l'air sur le piston du tube est alors $= \frac{1}{4}\pi\delta^2\mu\sigma$, μ étant l'excédant de la pression de l'air *comprimé* dans le tube sur cette de l'atmosphère, ou l'excédant de la pression de celle-ci sur la pression de l'air *raréfié* dans le tube. La pression $\frac{1}{4}\pi\delta^2\mu\sigma$ doit être égale à la résistance des wagons sur la ***plus forte*** pente de la route. Cette résistance est suivant (103) $Z = Q(n + \tang\beta_m) = Q(n + n_m)$, donc on a

134. $$\tfrac{1}{2}\pi\delta^2\mu\sigma = Q(n + n_m)$$

et delà on tire

135. $$\delta = 2\sqrt{\left(\frac{Q(n+n_m)}{\pi\mu\sigma}\right)}.$$

Soit par ex. le poids des wagons $Q = 77310$ kilogr. (1500 quintaux de Prusse). Supposons que l'air dans le tube de propulsion doive être *raréfié* jusqu'à la tension d'une demi-atmosphère, μ est $= \frac{1}{2}$. Soit la plus forte pente de la route $n_m = 0{,}01$. Cela donne en vertu de (135), n étant $= 0{,}004$,

136. $\delta = 54$ centimètres.

Un tuyau de ce diamètre serait déjà très-coûteux. Si la plus forte pente était $n_m = \frac{1}{40} = 0{,}025$, on trouverait même

137. $\delta = 78$ centim.

et un tube de ce diamètre est presque impraticable. Il est vrai que de moindres dimensions suffiraient au diamètre du tube, si l'on raréfiait l'air à un plus haut degré. La *limite* de la raréfaction est $\mu = \frac{5}{6}$. Pour $\mu = \frac{5}{6}$ on trouve dans les deux cas ci-dessus $\delta = 33$ et 62 centim.; mais le second est encore trop fort. Et puis la raréfaction jusqu'à $\mu = \frac{5}{6}$ exige beaucoup plus de force des pompes, et l'on perd les avantages des réservoirs médiateurs, qui alors ne sont plus praticables.

Pour ce qui concerne le diamètre du tube de propulsion, la *compression* de l'air est de beaucoup préférable à la *raréfaction.* Car en *comprimant* l'air, on peut disposer presque arbitrairement du diamètre du tube, parceque

dans ce cas, μ peut même être plus grand que $\frac{5}{6}$. De (134) on tire

$$138. \quad \mu = 4Q \cdot \frac{n + n_m}{\pi \delta^2 \sigma}.$$

Supposons un diamètre convenable du tube, par ex. de 36,6 centim., alors la formule (138) donne

$$139. \quad \mu = 1{,}09 \quad \text{pour} \quad n_m = 0{,}01 \quad \text{et}$$

$$140. \quad \mu = 1{,}97 \quad \text{pour} \quad n_m = 0{,}025.$$

Ces degrés de la tension de l'air sont encore fort praticables.

Nous remettons plus loin ce qu'il reste encore à dire sur les systèmes à tubes de propulsion placés entre les rails et sur leur comparaison avec les autres systèmes; nous passerons d'abord à l'étude des deux derniers systèmes N°s. IV et V à ***locomotives à air,*** lesquels diffèrent entre eux seulement en ce que les réservoirs d'où la locomotive tire sa force, consistent au N°. IV, en un tuyau fixe placé entre les rails, tandis que ces réservoirs pour N°. V sont placés sur la locomotive même, et sont par conséquent transportables eux-mêmes.

(La suite au cahier prochain.)

4.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein* zu Berlin.)

(Fortsetzung der Abhandlung Nr. 14. Band 30. Heft 3.)

III. Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln.

In Nr. I. dieser Beiträge am Schlusse habe ich eine einfache Methode angegeben, nach welcher man die symmetrischen Functionen der Wurzeln der bei der Transformation und Multiplication vorkommenden Gleichungen und hiernach auch die Coëfficienten des Zählers und Nenners der Transformationsformeln berechnen kann. In demselben Hefte des *Crelle*schen Journals, in welchem die betreffenden Formeln abgedruckt sind, zeigt *Jacobi*, dafs dieselben auch aus den Theoremen abgeleitet werden können, vermöge welcher dieser berühmte Mathematiker den Zähler und Nenner der Transformationsformeln durch eine neue Transcendente Ω ausgedrückt hat. Man braucht aber zum Beweise dieser Theoreme bei *Jacobi* die vollständige analytische Darstellung der Transformationsformeln, welche wiederum auf der Periodicität der elliptischen Functionen beruht, so wie ferner die Kenntnifs des Additionstheorems, während bei den von mir angestellten Betrachtungen Alles aus der Differenzialgleichung allein direct abgeleitet wird. Hier will ich noch eine andere, höchst einfache Methode angeben, durch welche man zu demselben Zwecke, der Auffindung der erwähnten symmetrischen Functionen, gelangen kann, und welche den Vorzug hat, dafs sie sich nicht blofs auf die kanonische Form, sondern auf die allgemeinsten elliptischen Formen mit derselben Leichtigkeit anwenden läfst.

Es seien

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$
$$\psi(y) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{E}y^4$$

ganze Functionen vierten Grades von x resp. y, und y eine rationale Function von x:

$$y = \frac{U(x)}{V(x)},$$

welche der Differenzialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{\partial y}{\sqrt{\psi(y)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

genügt. Der Einfachheit halber werde angenommen, dafs der Zähler $U(x)$ vom $n$ten, der Nenner $V(x)$ vom $n-1$ten Grade sei.

Setzt man

$$U(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = \Pi(x-\alpha),$$

so wird, da $V(x)$ von niederem Grade als $U(x)$ angenommen worden ist, nach der bekannten Theorie der Zerfällung in Partialbrüche:

$$(2.)\quad \frac{1}{y} = \frac{V(x)}{U(x)} = \Sigma\frac{V(\alpha)}{U'(\alpha)(x-\alpha)} \text{ und}$$

$$(2'.)\quad \frac{1}{y^2} = \left(\frac{V(x)}{U(x)}\right)^2 = \Sigma\frac{V(\alpha)^2}{U'(\alpha)^2(x-\alpha)^2} + \Sigma\frac{V(\alpha)[2V'(\alpha)U'(\alpha) - V(\alpha)U''(\alpha)]}{U'(\alpha)^3(x-\alpha)},$$

wo die Summation rechts sich auf alle Werthe von α bezieht, und die oben angehängten Striche die Differenziation bezeichnen. Diese Formel erfordert, dafs alle Wurzeln α der Gleichung $U=0$ verschieden sind; was hier nothwendig der Fall sein mufs, weil sonst, wie leicht zu zeigen, U und V einen gemeinschaftlichen Theiler hätten. Von diesen Wurzeln α wird übrigens nichts als bekannt vorausgesetzt, und sie kommen nur durchgehend in der Rechnung vor.

Die Werthe von $\frac{V}{U'}$ und $\frac{V(2V'U'-VU'')}{U'^3}$ für $x=\alpha$ können, wie folgt, aus der Differenzialgleichung (1.) bestimmt werden. Dieselbe nimmt durch die Substitution $y=\frac{U}{V}$ die Form an:

$$\frac{VU'-UV'}{V^2\sqrt{(\psi(y))}} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi(x))}}, \text{ oder}$$

$$(3.)\quad \varphi(x)(VU'-UV')^2 = \psi(y)V^4;$$

diese Gleichung (3.) nach x differenziirt giebt, wenn man der Kürze halber $VU'-UV'=T$ setzt:

$$(4.)\quad \varphi'(x)T^2 + 2\varphi(x)TT' = \psi'(y)TV^2 + 4\psi(y)V^3V'.$$

Wird nun in den Gleichungen (3.) und (4.) $x=\alpha$ gesetzt, so dafs $y=0$, $U=0$, so wird $T=VU'$, $T'=VU''-UV''=VU''$, und man erhält aus (3.)

$$\varphi(\alpha)U'^2 = \psi(0)V^2 \text{ und aus (4.)}$$

$$\varphi'(\alpha)U'^2 + 2\varphi(\alpha)U'U'' = \psi'(0)VU' + 4\psi(0)VV';$$

wird diese letztere Gleichung mit U' multiplicirt und aus der vorhergehenden $\psi(0)V^2$ statt $\varphi(\alpha)U'^2$ gesetzt, so kommt

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha)U'^3 + 2\psi(0)V^2U'' &= \psi'(0)VU'^2 + 4\psi(0)VV'U' \\ &= \psi'(0)\frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}}U'^3 + 4\psi(0)VV'U', \text{ oder} \\ 2\psi(0)V(2V'U'-VU'') &= U'^3\left(\varphi'(\alpha) - \psi'(0)\frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}}\right).\end{aligned}$$

Hiernach findet man also

$$\frac{V}{U'} = \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}} = \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{\mathfrak{A}}}, \qquad \frac{V^2}{U'^2} = \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(0)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\mathfrak{A}},$$

$$\frac{V(2V'U' - VU'')}{U'^3} = \frac{\varphi'(\alpha)}{2\psi(0)} - \frac{\psi'(0)}{2\psi(0)} \cdot \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}} = \frac{\varphi'(\alpha)}{2\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} \cdot \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$$

für $x = \alpha$. Diese Werthe rechts in (2.) und (2'.) eingesetzt, geben

$$(5.) \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{x - \alpha}.$$

$$(6.) \qquad \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi'(\alpha)}{x-\alpha} - \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{x-\alpha},$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt noch

$$\frac{1}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi'(\alpha)}{x-\alpha},$$

$$(7.) \qquad \frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y} = 2\Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \Sigma \frac{\varphi'(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Entwickelt man jetzt $\frac{1}{(x-\alpha)^2}$ und $\frac{1}{x-\alpha}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2\alpha}{x^3} + \frac{3\alpha^2}{x^4} + \frac{4\alpha^3}{x^5} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\alpha^4}{x^5} + \ldots,$$

so wird auf der rechten Seite der (7.) der Coëfficient von $\frac{1}{x^{\mu+1}}$ gleich $2\mu\Sigma\alpha^{\mu-1}\varphi(\alpha) + \Sigma\alpha^\mu\varphi'(\alpha)$, wo μ die Werthe 0, 1, 2, 3, in inf. erhalten kann. Es ist also nach (7.)

$$2\mu\Sigma\alpha^{\mu-1}\varphi(\alpha) + \Sigma\alpha^\mu\varphi'(\alpha)$$

= dem Coëfficienten von $\frac{1}{x^{\mu+1}}$ in der Entwicklung von

$$\frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y}.$$

Die Entwicklung von $\frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y}$ nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ist ein ganz elementares Problem und kann nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten aus der Differenzialgleichung (1.) abgeleitet werden. Setzt man demnach

$$(8.) \qquad \frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \text{in inf.},$$

so hat man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
Bn + 2CS_1 + 3DS_2 + 4ES_3 &= a_0,\\
2An + 3BS_1 + 4CS_2 + 5DS_3 + 6ES_4 &= a_1,\\
4AS_1 + 5BS_2 + 6CS_3 + 7DS_4 + 8ES_5 &= a_2,\\
6AS_2 + 7BS_3 + 8CS_4 + 9DS_5 + 10ES_6 &= a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und allgemein

$$(9.)\quad 2\mu AS_{\mu-1} + (2\mu+1)BS_\mu + (2\mu+2)CS_{\mu+1} + (2\mu+3)DS_{\mu+2} + (2\mu+4)ES_{\mu+3} = a_\mu,$$

wo der Kürze halber $\Sigma\alpha^\mu = S_\mu$ gesetzt ist; S_0 ist $= n$. Mittelst dieser Gleichungen kann man der Reihe nach S_3, S_4, S_5, etc. in inf. durch die, als bekannt anzusehenden Entwicklungscoëfficienten a_0, a_1, etc. und durch S_1 und S_2 ausdrücken; die eben erwähnten Entwicklungscoëfficienten sind algebraische Verbindungen von $A, B, C, D, E, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ allein; was S_1 und S_2 betrifft, so bleiben dieselben unbestimmt und ***können als die beiden willkürlichen Gröfsen betrachtet werden, welche das Problem einschliefst.***

Man kann auf diese Weise alle Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $U = 0$ finden, und aus diesen lassen sich wiederum alle andern symmetrischen Verbindungen dieser Wurzeln, namentlich nach den *Newton*schen Formeln die ***Coëfficienten*** des Polynoms $U(x)$ ableiten, in der Weise, dafs die Kenntnifs der Potenzsummen bis zu S_μ hinreicht, um die ersten μ Coëfficienten von $U(x)$ (ausgehend von der höchsten Potenz) zu bestimmen. Da aber eine endliche Anzahl von Gleichungen genügt, um alle Coëfficienten von $U(x)$ zu finden, und da die Gleichungen (9.) in unendlicher Menge vorhanden sind, so kann man eine fernere Anzahl derselben benutzen, um die Coëfficienten von $\psi(y)$ in die von $\varphi(x)$ auszudrücken, nachdem dies geschehen, müssen alle übrigen Gleichungen (9.) bis ins Unendliche ***identisch*** erfüllt sein. Der letztere Umstand könnte zu merkwürdigen Folgerungen führen, wenn es möglich wäre, näher in die Natur dieser Gleichungen einzudringen, hier mag es genügen, diesen Gegenstand der Aufmerksamkeit der Mathematiker zu empfehlen. — Nachdem $U(x)$ gefunden ist, kann man $V(x)$ nach der Gleichung

$$V(x) = \frac{U(x)}{y}$$

daraus ableiten; man kann auch $V(x)$ für sich nach der folgenden Methode bestimmen, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt.

Wenn nämlich der Nenner von y nicht, wie bisher, von $n-1$ten, sondern vom $n$ten oder $n+1$ten Grade angenommen wird, so kann man

$$y = \frac{U(x)}{V(x)+(p+qx)U(x)}$$

setzen, wo p und q Constanten, $U(x)$ und $V(x)$ wie vorhin vom $n$ten resp. $n-1$ten Grade sind; man hat dann

$$\frac{1}{y} = p+qx+\frac{V(x)}{U(x)}.$$

Die Zerfällung von $\frac{V}{U}$ und $\frac{V^2}{U^2}$ in Partialbrüche bleibt dieselbe, wie vorhin, und man hat also nur in der Gleichung (7.)

$\frac{1}{y}-p-qx$ an die Stelle von $\frac{1}{y}$ zu setzen,

d. h. mit andern Worten, man mufs bei Benutzung der Gleichung (7.) in diesem allgemeineren Falle zu der Entwicklung von $\frac{1}{y}$ nur negative Potenzen von x zulassen.

Man kann diesen Betrachtungen gröfsere Einfachheit und Allgemeinheit geben; auf folgende Weise.

Es sei $P=0$ irgend ein algebraisches Integral einer Differenzialgleichung von der Form (1.). Man kann annehmen, ohne Schaden der Allgemeinheit, dafs die Function P der beiden Variabeln x und y in Bezug auf x ganz und vom $n$ten Grade, und dafs der Coëfficient von x^n der Einheit gleich ist. Bezeichnen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

die n Wurzeln der Gleichung $P=0$, welche als eben so viele Functionen von y zu betrachten sind, so hat man für jeden Werth von x und y:

$$P = (x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n) = \prod_{\mu=1}^{\mu=n}(x-x_\mu),$$

$$\log P = \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\log(x-x_\mu),$$

und wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten nach y differenziirt, indem man x als constant betrachtet,

$$(a.)\quad \left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \Sigma\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\cdot\frac{1}{x_\mu-x},$$

$$(b.)\quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) = \Sigma\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{x_\mu-x}-\Sigma\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\right)^2\frac{1}{(x_\mu-x)^2}.$$

Nach (1.) hat man für $x = x_\mu$:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{(\varphi(x))}}{\sqrt{(\psi(y))}},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{(\varphi(x))}}{\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\psi'(y)}{2\psi(y)} + \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{(\varphi(x))}\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$= -\frac{\sqrt{(\varphi(x))}}{\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\psi'(y)}{2\psi(y)} + \frac{\varphi'(x)}{2\psi(y)}.$$

Werden die hieraus sich ergebenden Werthe von $\frac{\partial x_\mu}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2}$ in (*a.*) und (*b.*) eingesetzt, so kommt:

$$(c.) \quad \left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{(\psi(y))}} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(x_\mu))}}{x_\mu - x},$$

$$(d.) \quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2\psi(y)} \Sigma \frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x} - \frac{1}{\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\psi'(y)}{2\psi(y)} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(x_\mu))}}{x_\mu - x}$$

$$- \frac{1}{\psi(y)} \Sigma \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2},$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt

$$(e.) \quad 2\psi(y)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) + \psi'(y)\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \Sigma \frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x} - 2\Sigma \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2}.$$

Wenn speciell $P = U - Vy$ ist, wo U und V ganze Functionen von x vom $n$ten resp. $n-1$ten Grade sind, so wird

$$\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \frac{-V}{U - Vy}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) = \frac{-V^2}{(U - Vy)^2},$$

und aus (*e.*) wird

$$2\psi(y)\left(\frac{V}{U - Vy}\right)^2 + \psi'(y)\frac{V}{U - Vy} = 2\Sigma \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2} - \Sigma \frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x};$$

für $y = 0$ geht hieraus die Gleichung (7.) hervor.

Die rechte Seite der Gleichung (*e.*) kann man jetzt, wie folgt, umformen. Nach dem *Taylor*schen Satze ist

$$\varphi(x_\mu) =$$

$$\varphi(x) + \varphi'(x)(x_\mu - x) + \tfrac{1}{2}\varphi''(x)(x_\mu - x)^2 + \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)(x_\mu - x)^3 + \tfrac{1}{24}\varphi^{IV}(x)(x_\mu - x)^4,$$

$$\varphi'(x_\mu) =$$

$$\varphi'(x) + \varphi''(x)(x_\mu - x) + \tfrac{1}{2}\varphi'''(x)(x_\mu - x)^2 + \tfrac{1}{6}\varphi^{IV}(x)(x_\mu - x)^3,$$

indem die höheren Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach dem vierten verschwinden; hieraus folgt nun

$$\frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x} - 2\frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2} =$$

$$\frac{-2\varphi(x)}{(x_\mu - x)^2} - \frac{\varphi'(x)}{x_\mu - x} + \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)(x_\mu - x) + \tfrac{1}{12}\varphi^{IV}(x)(x_\mu - x)^2;$$

setzt man hier für x_μ seine n Werthe und summirt, so kommt, in Verbindung mit (*e.*):

$$(f.)\quad 2\psi(y)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right)+\psi'(y)\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right)=-2\varphi(x)\Sigma\frac{1}{(x_\mu-x)^2}-\varphi'(x)\Sigma\frac{1}{x_\mu-x}$$
$$+\tfrac{1}{6}\varphi'''(x)(X_1-nx)$$
$$+\tfrac{1}{12}\varphi^{\mathrm{IV}}(x)(X_2-2X_1x+nx^2).$$

Der Kürze halber ist

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=X_1,\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=X_2$$

gesetzt worden; übrigens ist $\frac{1}{6}\varphi'''(x)=D+4Ex$, $\frac{1}{12}\varphi^{\mathrm{IV}}(x)=2E$, und die ganze Function von x, welche rechts in (*f.*) hinzutritt, und die ich mit ϱ bezeichne, kann daher auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\varrho=(D+4Ex)(X_1-nx)+2E(X_2-2X_1x+nx^2)$$
$$=DX_1+2EX_2-n(Dx+2Ex^2)=D\Sigma(x_\mu-x)+2E\Sigma(x_\mu^2-x^2).$$

Von der andern Seite folgt auch aus $\log P=\Sigma\log(x-x_\mu)$, wenn man nach x differenziirt und y als constant ansieht,

$$\frac{\partial \log P}{\partial x}=\Sigma\frac{1}{x-x_\mu},\qquad \frac{\partial^2 \log P}{\partial x^2}=-\Sigma\frac{1}{(x-x_\mu)^2}.$$

Werden nun die Werthe dieser Summen rechts in (*f.*) eingesetzt, so kommt endlich

$$(g.)\quad 2\psi(y)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right)+\psi'(y)\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right)=2\varphi(x)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial x^2}\right)+\varphi'(x)\left(\frac{\partial \log P}{\partial x}\right)+\varrho;$$

welcher Gleichung also jedes algebraische Integral P der (1.) genügt.

Diese partielle Differenzialgleichung für P, welche sich noch auf die elegante Form bringen läfst:

$$(g'.)\quad \frac{\sqrt{(\psi(y))}\,\partial\cdot[\sqrt{(\psi(y))}\,\partial \log P]}{\partial y^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(\varphi(x))}\,\partial\cdot[\sqrt{(\varphi(x))}\,\partial \log P]}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}D(X_1-nx)+E(X_2-nx^2),$$

zerlegt sich, sobald die Zusammensetzung von P in Bezug auf den Variabeln y festgestellt wird, in eine Reihe von totalen Differenzialgleichungen für die Coëfficienten, welche Functionen von x sind, indem man die Differenziation nach y ausführen kann. Es werden hierdurch alle diese Functionen von x vollkommen bestimmt, bis auf gewisse Constanten, welche durch die von x unabhängigen und nur von y abhängenden Gröfsen X_1 und X_2 in die Rechnung kommen. — Die Differenzialgleichungen, welche *Jacobi* im 4ten Bande dieses Journals Seite 376 gegeben hat, sind als specielle Fälle hierunter begriffen. — Die Gleichung (*g'.*) läfst sich leichter handhaben und prägt sich besser dem Ge-

dächtnisse ein, wenn man $\frac{\partial y}{\sqrt{(\psi(y))}} = \partial u$, $\frac{\partial x}{\sqrt{(\varphi(x))}} = \partial t$ setzt und ihr die Form giebt:

$$(h.) \quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2}\right) + \tfrac{1}{2} D(X_1 - nx) + E(X_2 - nx^2),$$

oder symbolisch:

$$[u^2 - t^2] \log P = \tfrac{1}{2} D(X_1 - nx) + E(X_2 - nx^2) \text{ *).}$$

Es sei, um das einfachste Beispiel zu nehmen, wiederum $P = U - Vy$, wo U, V ganze Functionen von x vom $n$ten, resp. $n-1$ten Grade sind und in U die höchste Potenz x^n die Einheit zum Coëfficienten hat. Die linke Seite von $(h.)$ wird

$$\frac{-\psi(y) V^2}{P^2} - \tfrac{1}{2}\psi'(y)\frac{V}{P},$$

und wenn man durch U', V' die Ableitungen von U, V nach t bezeichnet, welche sich leicht in solche nach x umsetzen lassen, so wird

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2} = -\frac{(U' - V'y)^2}{(U - Vy)^2} + \frac{U'' - V''y}{U - Vy}.$$

Ferner ist offenbar

$$DX_1 + 2EX_2 \text{ von der Form } a + by + cy^2,$$

wo a, b, c Constanten sind, denn da

$$P = x^n + (a_1 - b_1 y) x^{n-1} + (a_2 - b_2 y) x^{n-2} + \ldots.$$

gesetzt werden kann, so wird

$$X_1 = -a_1 + b_1 y, \qquad X_2 = (a_1 - b_1 y)^2 - 2(a_2 - b_2 y).$$

Die Gleichung $(h.)$ liefert demnach, wenn man die Nenner fortschafft:

$$2\psi(y) V^2 + \psi'(y) V(U - Vy) + (a + by + cy^2 - Dnx - 2Enx^2)(U - Vy)^2$$
$$= 2(U' - V'y)^2 - 2(U - Vy)(U'' - V''y).$$

Da diese Gleichung unabhängig von dem Werthe von y bestehen mufs, so

---

*) Wenn man symbolisch für eine Function W von mehreren Variabeln t, u, v, ... die partiellen Differentialquotienten durch $[t]W$, $[u]W$, $[v]W$, etc. bezeichnet, das, was sonst durch $\frac{\partial^{\mu+\nu+\ldots} W}{\partial t^\mu \partial u^\nu \ldots}$ ausgedrückt wird, durch $[t^\mu u^\nu \ldots]W$, $[t]W + [u]W$ durch $[t+u]W$ bezeichnet, so ist $[tu]W = [ut]W$, $[t][u+v]W = [tu+tv]W$, d. h die Ordnung der Differenziationen ist gleichgültig, und wenn man W sowohl nach u, als nach v differenziirt und die Summe der Differenzialquotienten nach t, so kommt dasselbe als wenn man $[tu]W$ und $[tv]W$ addirt; es gelten deshalb von solchen symbolischen Ausdrücken alle algebraischen Umformungen, z. B. der binomische Satz u. dergl., und man kann mit denselben wie mit wirklichen Gröfsen rechnen. *Cayley* hat neuerdings sehr schöne Anwendungen von diesem Principe gemacht, doch ist leider seine Bezeichnungsweise schwer verständlich.

zerfällt sie, wenn man für $\psi(y)$ und $\psi'(y)$ ihre Werthe

$$\psi(y) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{E}y^4,$$
$$\psi'(y) = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}y + 3\mathfrak{D}y^2 + 4\mathfrak{E}y^3$$

setzt, nach Potenzen von y ordnet und die Coëfficienten gleicher Potenzen von y vergleicht, in 5 Gleichungen, von denen zwei, welche die Coëfficienten von y^3 und y^4 ergeben, nur zeigen, dafs $b = \mathfrak{D}$, $c = 2\mathfrak{E}$ ist, während die übrigen drei totale Differenzialgleichungen zur Bestimmung von U und V sind, nämlich die folgenden:

$$(k.) \quad \begin{cases} 2\mathfrak{A}V^2 + \mathfrak{B}UV + \gamma U^2 = 2(U'^2 - UU''), \\ \mathfrak{B}V^2 + 2(\mathfrak{C} - \gamma)UV + \mathfrak{D}U^2 = 2(-2U'V' + UV'' + VU''), \\ \gamma V^2 + \mathfrak{D}UV + 2\mathfrak{E}U^2 = 2(V'^2 - VV''), \end{cases}$$

wo $\gamma = a - Dnx - 2Enx^2$ ist. Wenn man diese drei Gleichungen addirt, nachdem man die erste mit $\frac{1}{2}V^2$, die zweite mit $\frac{1}{2}UV$, die dritte mit $\frac{1}{2}U^2$ multiplicirt hat, so gelangt man zu der folgenden:

$$\mathfrak{A}V^4 + \mathfrak{B}V^3U + \mathfrak{C}V^2U^2 + \mathfrak{D}VU^3 + \mathfrak{E}U^4 = (U'V - UV')^2,$$

welche nichts anders ist, als die Gleichung (1.); die Gleichung (1.) ist also eine unmittelbare Folge der drei obigen Differenzialgleichungen; es ist aber vortheilhafter, die *drei* obigen Gleichungen zu benutzen, als zwei derselben in Verbindung mit (1.). Wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$, so wie B und D Null sind, so erhält man aus der ersten und dritten der obigen die von *Jacobi* aufgestellten Differenzialgleichungen; die zweite wird in diesem Falle besonders einfach, da sich ihre linke Seite auf das eine Glied $2(\mathfrak{C} - \gamma)UV$ reducirt.

Betrachten wir noch den Fall, welcher der Einfachheit nach auf den eben behandelten folgt, und bei welchem P in Bezug auf y auf den zweiten Grad steigt. Es sei also

$$P = U + Vy + Wy^2.$$

Dafs Integrale von dieser Form existiren, lehrt z. B. die Form, in welcher *Euler* zuerst das Summations- oder Additions-Theorem aufgestellt hat. Die linke Seite von (*h.*) wird

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} = \psi(y)\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2} + \tfrac{1}{2}\psi'(y)\frac{\partial \log P}{\partial y}$$
$$= \psi(y)\left(\frac{P_{,,}}{P} - \frac{P_{,}^2}{P^2}\right) + \tfrac{1}{2}\psi'(y)\frac{P_{,}}{P}$$
$$= \frac{1}{P^2}\left\{\psi(y)(2WP - (V + 2Wy)^2) + \tfrac{1}{2}\psi'(y)(V + 2Wy)P\right\};$$

ferner wird, wenn man wieder die Ableitungen nach t durch oben angehängte Striche bezeichnet,

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2} = \frac{1}{P^2}\left\{(U+Vy+Wy^2)(U''+V''y+W''y^2)-(U'+V'y+W'y^2)^2\right\},$$

und endlich wird $\frac{1}{2}DX_1+EX_2$ eine ganze Function von y mit constanten Coëfficienten, die mit η bezeichnet sei und welche scheinbar bis auf den vierten Grad steigt; denn P nach fallenden Potenzen von x geordnet nimmt die Form

$$P = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots$$

an, wo p_1, p_2, ... in Bezug auf y vom zweiten Grade sind, während $X_1 = -p_1$, $X_2 = p_1^2 - 2p_2$, also X_2 vom vierten Grade ist; es wird sich aber sogleich zeigen, dafs p_1 nur vom ersten Grade und X_2, also auch η, nur vom zweiten Grade sein kann, d. h. dafs W in Bezug auf x nur vom $n-2$ten Grade sein kann, während V vom $n-1$ten Grade ist. Entwickelt man auf diese Weise die (*h.*) und schafft auf beiden Seiten den Nenner P^2 weg, so erhält man eine Gleichung, die für jeden Werth von y gilt, und in welcher nur das einzige Glied $P^2\eta$ möglicherweise von höherem Grade als dem 6ten in Bezug auf y sein könnte, während alle übrigen Glieder nur vom 6ten Grade sind; es müssen sich also in diesem einen Gliede alle höheren Potenzen von y vernichten, und da P^2 vom vierten Grade ist, weil W von Null verschieden angenommen wird, so kann η nur höchstens vom zweiten, darf also nicht vom vierten Grade sein, und es mufs demnach auch p_1 vom ersten Grade, und W in Bezug auf x vom $n-2$ten Grade sein. Die gefundene Gleichung endlich, nach y geordnet und zerfället, liefert sieben einzelne Gleichungen; nämlich zwei Gleichungen zur Bestimmung zweier der drei Constanten in η, während die dritte unbestimmt bleibt, und zur Bestimmung der drei Functionen U, V, W fünf totale Differenzialgleichungen, welche ich, um Weitläufigkeit zu vermeiden, nicht hinschreibe.

Man kann die hauptsächlichen Momente der Schlufsfolgen, welche zu der Fundamentalgleichung (*h.*) führen, noch übersichtlicher darstellen. Das Gelingen des Verfahrens beruht hauptsächlich darauf, dafs, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(\varphi(x))}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \sqrt{(\varphi(\xi))}$$

gesetzt wird, wo $\varphi(x)$ irgend eine ganze Function von x ist, dann

$$\left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial \tau^2}\right) + r$$

folgt, wo r eine ganze Function von x und ξ ist, deren Grad in Bezug auf

jeden einzelnen der beiden Variabeln um zwei Einheiten niedriger ist, als der von $\varphi(x)$; denn aus den vorgelegten Gleichungen $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \varphi(x)$, $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 = \varphi(\xi)$ ergiebt sich $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\varphi'(x)$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2}\varphi'(\xi)$ und, wenn $h = x - \xi$ gesetzt wird,

$$h\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = -\varphi(x) + \tfrac{1}{2}h\varphi'(x) = -\varphi(\xi) - \tfrac{1}{2}h\varphi'(\xi) + h^2 r$$
$$= -h\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 + h^2 r, \text{ also}$$

$$\frac{1}{x-\xi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{1}{(x-\xi)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\xi - x}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{(\xi - x)^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 + r,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial \tau^2}\right) + r.$$

Wird nun eine Differenzialgleichung von folgender Form:

$$\frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = f(y)\,\partial y$$

vorgelegt, und betrachtet man y als Function von u, von der Art, dafs $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{f(y)}$ ist, so hat man

$$\partial \tau = \partial u,$$

folglich wird die vorhin abgeleitete Formel:

$$\left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial u^2}\right) + r.$$

Im Fall ein algebraisches Integral $P = 0$ der vorgelegten Differenzialgleichung existirt, wo man P als eine ganze Function von x und y annehmen kann, die für $x = \xi$ verschwindet, wird $\log P = \Sigma \log(x - \xi)$, wenn die Summation sich über alle Wurzeln ξ der Gleichung $P = 0$ ausdehnt, mithin erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \Sigma \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \Sigma \log(x-\xi)}{\partial u^2}\right) + \Sigma r = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}\right) + \Sigma r.$$

Σr als symmetrische ganze Function aller ξ und aufserdem als ganze Function von x, deren Grad oben angegeben, wird einer ganzen Function von x und y gleich, deren Grad in Bezug auf y dem von P gleichkommt, und in Bezug auf x um zwei Einheiten niedriger ist, als der von $\varphi(x)$. Der eben gefundenen Formel

$$\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}\right) + \Sigma r$$

genügt also jedes algebraische Integral $P = 0$ der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = f(y)\,\partial y,$$

und es ist in dieser Formel P eine (nach x ganze) Function der in ihr als unabhängig zu betrachtenden Variabeln x und y; der Coëfficient der höchsten Potenz von x in P ist $= 1$ und x resp. y sind Functionen von t resp. u, deren Abhängigkeit durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\varphi(x)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{f(y)}$$

bestimmt wird.

Im Februar 1846.

5.

Notiz über Partialbrüche.

(Von Herrn *G. Eisenstein*, Dr. phil. zu Berlin.)

Es sei Ω eine ganze Function von x vom $n$ten Grade, deren höchstes Glied x^n die Einheit zum Coëfficienten hat, während die übrigen Coëfficienten als Functionen von y angenommen werden. Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$\Omega = 0,$$

welche als eben so viele Functionen von y zu betrachten sind, so hat man für jeden Werth von x und y identisch:

$$\Omega = \Pi(x - x_\mu), \qquad \log\Omega = \Sigma\log(x - x_\mu),$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten nach y differenziirt, wobei x als constant anzusehen ist,

$$(1.) \qquad \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) = -\Sigma\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\cdot\frac{1}{x - x_\mu}.$$

Der Differenzialquotient $\frac{\partial x_\mu}{\partial y}$ kann vermöge der Gleichung $\Omega = 0$ ausgedrückt werden, denn diese giebt für $x = x_\mu$,

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} = 0, \text{ also}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)} = -\frac{\Omega_1}{\Omega'},$$

nach der Bezeichnung von ***Lagrange;*** die Gleichung (1.) wird hiernach

$$(2.) \qquad \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) = \Sigma\frac{\Omega_1}{\Omega'}\cdot\frac{1}{x - x_\mu},$$

wo rechts in $\frac{\Omega_1}{\Omega'}$ nach geschehener Differenziation $x = x_\mu$ zu setzen ist. In dem speciellen Falle, wenn Ω die Form

$$\Omega = U + Vy$$

hat, wo U, V ganze Functionen von x vom $n$ten resp. $n-1$ten Grade mit

constanten Coëfficienten sind, wird

$$\Omega_1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = V \quad \text{und} \quad \Omega' = U' + V'y;$$

demnach giebt die (2.) in diesem Falle

$$(3.) \qquad \frac{V}{U+Vy} = \Sigma \frac{V}{U'+V'y} \cdot \frac{1}{x-x_\mu},$$

wo rechts in $\frac{V}{U'+V'y}$ nach geschehener Differenziation $x = x_\mu$ zu setzen ist.

So lange y allgemein bleibt, sind die Wurzeln der Gleichung $\Omega = 0$ alle verschieden, und Ω' kann nicht für $x = x_\mu$ verschwinden; sind nun auch die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ alle verschieden, so kann man in (3.) geradezu $y = 0$ setzen und erhält

$$(4.) \qquad \frac{V}{U} = \Sigma \frac{V}{U'} \cdot \frac{1}{x-x_\mu},$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind, und in $\frac{V}{U'}$ nach geschehener Differenziation $x = x_\mu$ zu setzen ist. Dies ist die bekannte Zerfällung in Partialbrüche. Wenn man fortfährt, die Gleichung (1.) nach y zu differenziiren, und die Werthe von

$$\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 x_\mu}{\partial y^3}, \quad \text{etc.}$$

aus der Gleichung $\Omega = 0$ bestimmt, so erhält man auf dieselbe Weise die Zerfällung von $\frac{V^2}{U^2}$, $\frac{V^3}{U^3}$, u. s. w. Z. B. eine einmalige Differenziation der Gleichung (1.) giebt

$$\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \Sigma \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{(x-x_\mu)^2} + \Sigma \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{x-x_\mu};$$

nun ist für $x = x_\mu$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 = \frac{\Omega_,^2}{\Omega'^2}; \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{-\Omega'\left(\Omega_{,,} + \Omega_,' \frac{\partial x}{\partial y}\right) + \Omega_,\left(\Omega_,' + \Omega'' \frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\Omega'^2}$$

$$= \frac{-\Omega'^2 \Omega_{,,} + \Omega_,(2\Omega_,'\Omega' - \Omega_, \Omega'')}{\Omega'^3},$$

welche Werthe rechts eingesetzt werden müssen; wenn $\Omega = U + Vy$ ist, so hat man $\Omega_, = V$, $\Omega_{,,} = 0$, also kommt

$$\frac{V^2}{(U+Vy)^2} = \Sigma \frac{V^2}{\Omega'^2} \cdot \frac{1}{(x-x_\mu)^2} + \Sigma \frac{V(2V'\Omega' - V\Omega'')}{\Omega'^3} \cdot \frac{1}{x-x_\mu}$$

und für $y = 0$

$$\frac{V^2}{U^2} = \Sigma \frac{V^2}{U'^2} \cdot \frac{1}{(x-x_\mu)^2} + \Sigma \frac{V(2V'U' - VU'')}{U'^3} \cdot \frac{1}{x-x_\mu},$$

wo rechts in $\frac{V^2}{U'^2}$ und $\frac{V(2V'U'-VU'')}{U'^3}$, $x = x_\mu$ zu setzen ist; und so weiter fort. Bei der bekannten Ableitung des Falles, wenn gleiche Wurzeln vorkommen, durch Differenziiren nach diesen Wurzeln, verweile ich nicht; man vergleiche hierüber *Jacobi's* „Analytische Untersuchungen über Partialbrüche, Berlin bei Herbig 1825."

Die Summe der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist gleich dem negativen Coëfficienten von x^{n-1} in Ω, also, wenn man diesen Coëfficienten durch k bezeichnet,

$$\Sigma x_\mu = -k \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{\partial x_\mu}{\partial y} = -\frac{\partial k}{\partial y}.$$

In dem Falle $\Omega = U + Vy$ wird $\frac{\partial k}{\partial y} =$ dem Coëfficienten der höchsten Potenz von V, während

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial y} = \frac{-V}{\Omega'} \quad \text{für} \quad x = x_\mu$$

ist; so dafs also

$$\Sigma \frac{V}{\Omega'},$$

wenn man in der Summe statt x alle Wurzeln der Gleichung $\Omega = 0$ setzt, dem Coëfficienten von x^{n-1} in V gleich wird. Läfst man demnach V mit ax^{n-1} anfangen und setzt $y = 0$, so wird

$$\Sigma \frac{V}{U'} = a,$$

wenn in der Summe statt x alle Wurzeln der Gleichung $U = 0$ gesetzt werden: und hierin sind die speciellen Formeln enthalten:

$$\Sigma \frac{1}{U'} = 0, \quad \Sigma \frac{x}{U'} = 0, \quad \Sigma \frac{x^2}{U'} = 0, \quad \ldots \quad \Sigma \frac{x^{n-2}}{U'} = 0, \quad \Sigma \frac{x^{n-1}}{U'} = 1,$$

welches bekanntlich ein sehr wichtiges und oft angewandtes System von Gleichungen ist. *Jacobi* sagt darüber: „E theorematis, quae in elementis algebraicis traduntur, vix exstat aliud magis utile in quaestionibus maxime diversis." (*Crelle's* Journal 14. Band Seite 281.)

Es seien z. B. die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ die n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$, so dafs

$$U = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n);$$

dann wird U' für $x = \mu$,

$$= (\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-(\mu-1))(\mu-(\mu+1))\ldots.(\mu-n)$$
$$= (-1)^{n-\mu}1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(\mu-1)\times 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-\mu)$$
$$= \frac{(-1)^{\mu}}{\mu\, n_\mu}(-1)^n n!,$$

wenn n_μ den μten Binomialcoëfficienten für den Exponenten n bezeichnet; die obigen Formeln geben hiernach

$$\Sigma(-1)^\mu n_\mu \mu = 0, \quad \Sigma(-1)^\mu n_\mu \mu^2 = 0, \quad \ldots., \quad \Sigma(-1)^\mu n_\mu \mu^{n-1} = 0,$$
$$\Sigma(-1)^\mu n_\mu \mu^n = (-1)^n n!,$$

welche Formeln man gewöhnlich aus der Differenzenrechnung abzuleiten pflegt. Aus der letzten dieser Formeln

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}(-1)^\mu n_\mu \mu^n = (-1)^n n!$$

hat bekanntlich ***Lagrange*** den ***Wilson***schen Satz bewiesen. Ist nämlich $n+1 = p$ eine ungerade Primzahl, so hat man nach dem ***Fermat***schen Satz $\mu^n \equiv 1 \pmod{p}$, also

$$n! \equiv \Sigma(-1)^\mu n_\mu \pmod{p}, \text{ aber}$$
$$\Sigma(-1)^\mu n_\mu = (1-1)^\mu - 1 = -1, \text{ folglich}$$
$$n! \equiv -1 \pmod{p}, \text{ d. h. } (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Man erhält ähnliche Formeln, wenn man zu Wurzeln der Gleichung $U = 0$ die aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und dergl. annimmt.

Im Februar 1846.

6.

Über Lehrsätze, von welchen die bekannten Sätze über parallele Curven besondere Fälle sind.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 26. März in der hiesigen Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)

Es seien in einer Ebene zwei beliebige Curven A, B gegeben; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ seien zwei parallele Tangenten derselben und a, b deren Berührungspuncte. Man lasse die Tangenten auf den Curven gleichzeitig so rollen, dafs sie in jedem Augenblicke parallel sind, bezeichne sie in irgend einer Endlage durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und die Berührungspuncte durch a_1, b_1, und nenne die von den Berührungspuncten a, b durchlaufenen (oder von den Tangenten überrollten) Bogen aa_1, bb_1 ***entsprechende Bogen,*** so wie je ein Paar gleichzeitige Berührungspuncte a, b ***entsprechende Puncte*** dieser Bogen.

Aus einem in der Ebene beliebig angenommenen Pole P ziehe man nach jedem Puncte b des Bogens bb_1 den Strahl Pb, und aus dem b entsprechenden Puncte a des andern Bogens aa_1 auf dessen concaver Seite den Strahl ac parallel Pb und nehme $ac = Pb$: so ist der Ort des Endpuncts c des letztern Strahls irgend ein bestimmter dritter Curvenbogen cc_1, dessen Puncte c mit den Puncten a, b der Bogen aa_1, bb_1 in bestimmte Correspondenz treten. ***Dieser Bogen cc_1 bleibt stets sich selbst congruent und gleichliegend, es mag der Pol P in der Ebene angenommen werden, wo man will;*** so dafs er aus jeder andern Lage, die einem Pole $\mathfrak{P}$ entspricht, in die vorige durch eine blofs geradlinige Bewegung ohne Drehung übergehen kann, indem jeder Punct in ihm eine Gerade beschreibt, welche parallel und gleich $\mathfrak{P}P$ ist.

Zieht man umgekehrt aus einem beliebigen Pol P nach jedem Puncte a des Bogens aa_1 einen Strahl Pa und aus dem a entsprechenden Puncte b in bb_1 den Strahl $b\gamma$ parallel und gleich Pa, so ist der Ort des Endpuncts γ wiederum ein solcher Curvenbogen $\gamma\gamma_1$, welcher mit dem vorigen cc_1 congruent ist, aber gegen diesen symmetrisch liegt, so dafs er erst mit ihm *gleichliegend* wird, wenn man ihn *in seiner Ebene* eine Drehung von 180^0 machen läfst.

Der Bogen cc_1 wird ferner auch noch auf folgende dritte Art erzeugt. Verbindet man jedes Paar entsprechende Puncte a, b der Bogen aa_1, bb_1 durch eine Gerade ab und zieht aus irgend einem Pol P den Strahl PC parallel und gleich ab, so ist der Ort seines Endpuncts C abermals ein solcher Curvenbogen CC_1, der mit dem Bogen cc_1 congruent ist und mit ihm *gleich* oder *symmetrisch* liegt, je nachdem der Strahl PC aus P nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung gezogen wird. Der Bogen CC_1 bleibt sich selbst gleich und gleichliegend, während die Bogen aa_1 und bb_1 ihre gegenseitige Lage durch blofse Verschiebung, ohne Drehung, beliebig ändern.

Der auf diese drei verschiedenen Arten erzeugte Bogen cc_1 hat in Bezug auf die Bogen aa_1 und bb_1 die doppelte Eigenschaft: 1°. *„dafs seine Tangente* $\mathfrak{C}$ *in jedem Puncte c den Tangenten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *der Bogen* aa_1, bb_1 *in den correspondirenden Puncten a, b parallel ist;"* und 2°. *„dafs er in Rücksicht seiner Länge dem Unterschiede der Bogen* aa_1 *und* bb_1 *gleich ist."*

Wird bei der obigen ersten Construction aus dem Puncte a statt des Strahls ac in entgegengesetzter Richtung ein Strahl ad auf der *convexen* Seite des Bogens aa_1 dem Strahle Pb parallel gezogen und $ad = Pb$ genommen, so beschreibt auch der Endpunct d einen Curvenbogen dd_1, dessen Tangente $\mathfrak{D}$ in jedem Puncte d stets den Tangenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der Bogen aa_1, bb_1 in den correspondirenden Puncten a, b parallel ist, und welcher mit sich selbst congruent bleibt, der auf die Curve bb_1 bezogene Pol P mag liegen wo man will; seine Länge aber ist der *Summe* der Bogen aa_1 und bb_1 gleich. Man hat also:

$$\text{I.} \quad cc_1 = aa_1 - bb_1 \text{ (oder } cc_1 = bb_1 - aa_1),$$

$$\text{II.} \quad dd_1 = aa_1 + bb_1;$$

und daraus weiter:

$$\text{III.} \quad 2aa_1 = dd_1 + cc_1,$$

$$\text{IV.} \quad 2bb_1 = dd_1 - cc_1.$$

Zwischen den Flächenräumen des Sectors Pbb_1 und der beiden gemischtlinigen Vierecke aa_1c_1c, aa_1d_1d (wovon das erste die Grenzstrahlen ac, a_1c_1 und die Bogen aa_1, cc_1 und das andere die Grenzstrahlen ad, a_1d_1 und die Bogen aa_1, dd_1 zu Seiten hat) findet die Relation statt, dafs die Differenz der Vierecke dem doppelten Sector gleich ist, also

$$\text{V.} \quad aa_1d_1d - aa_1c_1c = 2Pbb_1.$$

Zwischen den Curven bb_1 und cc_1 findet die Reciprocität statt, dafs wenn man für einen Augenblick statt der bb_1 die cc_1 als gegeben annimmt

und nach der obigen ersten Construction verfährt, alsdann eine der Curve bb_1 gleiche und gleichliegende resultirt; d. h. wenn man aus einem beliebigen Pol P nach jedem Puncte c in cc_1 den Strahl Pc und aus dem entsprechenden Puncte a in aa_1 den Strahl $a\beta$ mit ihm parallel zieht und $a\beta = Pc$ nimmt, so ist der Ort des Endpuncts β ein dem Bogen bb_1 gleicher und mit ihm gleichliegender Curvenbogen $\beta\beta_1$.

Zieht man zwischen je zwei entsprechenden Puncten a, b der gegebenen Curven aa_1, bb_1 die Gerade ab, so ist der Ort ihrer Mitte δ ein dem oben beschriebenen Bogen dd_1 ähnlicher und ähnlichliegender Bogen $\delta\delta_1$, dessen Dimensionen sich zu denen von dd_1 wie $1:2$ verhalten. Der Bogen $\delta\delta_1$ bleibt sich selbst congruent, während aa_1 und bb_1 ihre gegenseitige Lage durch blofse parallele Verschiebung ohne Drehung beliebig ändern. Wird aber der Bogen bb_1 in der Ebene um 180^0 gedreht und werden sodann wieder die nämlichen entsprechenden Puncte a und b durch die Gerade ab verbunden, so ist der Ort ihrer Mitte γ jetzt ein dem Bogen cc_1 ähnlicher Bogen $\gamma\gamma_1$, der sich auch zu cc_1 wie $1:2$ verhält. Zieht man ferner zwischen den entsprechenden Puncten b, c der Bogen bb_1, cc_1 die Gerade bc, so ist der Ort ihrer Mitte α ein dem aa_1 ähnlicher und ähnlichliegender Bogen $\alpha\alpha_1$, der sich zu ihm ebenfalls wie $1:2$ verhält.

In Rücksicht der vier Curven aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 mag noch bemerkt werden, was leicht zu sehen ist, *dafs sowohl ihre Evoluten als auch ihre Evolventen unter sich die nämliche Beziehung haben, wie jene Curven selbst.*

Besonderer Fall. Ist insbesondere die eine gegebene Curve bb_1 ein Kreisbogen und wird der Pol P in dessen Mittelpunct angenommen, so werden die beiden Curven cc_1 und dd_1 der andern gegebenen Curve aa_1 parallel, und alsdann enthalten die obigen Formeln I. und II. den einen von den zwei bekannten Sätzen über parallele Curven. Der andere Satz bezieht sich auf den Inhalt der oben genannten Vierecke aa_1c_1c und aa_1d_1d; er folgt aus dem ersten und aus dem Umstande, dafs hier die Strahlen $Pb = ac = ad$ eine constante Länge haben, nämlich dem Radius r des Kreises gleich sind; denn hierdurch wird der Sector $Pbb_1 = \frac{1}{2}r\cdot bb_1$, und für die Vierecke hat man:

$$\text{VI.} \quad \begin{cases} aa_1c_1c = r\cdot aa_1 - \frac{1}{2}r\cdot bb_1 = r\cdot cc_1 + \frac{1}{2}r\cdot bb_1, \\ aa_1d_1d = r\cdot aa_1 + \frac{1}{2}r\cdot bb_1 = r\cdot dd_1 - \frac{1}{2}r\cdot bb_1; \end{cases}$$

was den zweiten Satz ausdrückt.

Wird dagegen der Pol P in der Ebene des Kreises bb_1 beliebig angenommen, so bleiben zwar die Curven cc_1 und dd_1, zufolge des Obigen,

sich selbst congruent, aber sie sind nicht mehr der Curve aa_1 parallel; ***jedoch können sie durch Verschiebung immer mit dieser in parallele Lage gebracht werden.***

Bemerkung.

In Bezug auf krumme Oberflächen finden analoge Constructionen und zum Theil auch analoge Sätze statt. Folgende kurze Andeutung darüber mag hier genügen.

Denkt man sich zwei beliebige krumme Oberflächen A und B in fester Lage und an denselben irgend zwei parallele Berührungs-Ebnen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nennt diese letztern ***entsprechende Berührungs-Ebnen,*** so wie ihre Berührungspuncte a und b ***entsprechende Puncte*** der Flächen; denkt sich ferner auf diesen Flächen A und B zwei solche begrenzte Flächentheile A_1 und B_1, welche überall, bis in ihre Grenzlinien, entsprechende Puncte enthalten, und zieht sodann aus einem im Raume beliebig gewählten Pole P nach jedem Puncte b des Flächentheils B_1 den Strahl Pb und aus dem entsprechenden Puncte a des andern Flächentheils A_1 mit ihm parallel den Strahl ac, und nimmt $ac = Pb$: so ist der Ort des Endpuncts c eine bestimmte dritte Fläche C_1, deren Berührungs-Ebne $\mathfrak{C}$ im Puncte c den Berührungs-Ebnen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Flächen A_1 und B_1 in den correspondirenden Puncten a und b parallel ist. Die Fläche C_1 bleibt sich selbst congruent und gleichliegend, es mag der auf die Fläche B_1 bezogene Pol P angenommen werden, wo man will. — Wird aus dem Puncte a der Fläche A_1, statt des Strahls ac, ein Strahl ad nach gerade entgegengesetzter Richtung gezogen, also auch parallel Pb, und wird eben so $ad = Pb$ genommen, so ist der Ort des Endpuncts d gleicherweise eine bestimmte vierte Fläche D_1, deren Berührungs-Ebnen denen von A_1 und B_1 in den entsprechenden Puncten parallel sind, und welche sich selbst congruent und gleichliegend bleibt, während der Pol P seine Lage beliebig ändert. Zwischen den vier Flächen findet unter andern die folgende Relation statt:

VII. $$C_1 + D_1 = 2A_1 + 2B_1.$$

Ist die Fläche B insbesondere eine Kugelfläche und wird ihr Mittelpunct zum Pol P gewählt, so werden die Flächen C_1 und D_1 der andern gebenen Fläche A_1 (so wie auch unter sich) parallel. Denn die Strahlen ac und ad sind dann auf der Fläche A_1 normal und haben constante Längen, indem sie alle dem Radius $Pb = r$ der Kugel B gleich sind. Diejenigen Strahlen ac und ad, oder cad, welche durch die Grenzlinie des Flächentheils A_1

gehen (d. h. die Normalen der Fläche A_1 längs ihrer Grenzlinie), liegen in einer krummen Fläche M, welche mit den Flächen C_1 und D_1 zusammen einen bestimmten Körper K begrenzt. Für das Volumen dieses Körpers hat man folgenden Ausdruck:

VIII. $$K = \tfrac{1}{3} r(C_1 + D_1 + 4A_1) = \tfrac{2}{3} r(3A_1 + B_1).$$

In derselben Vorlesung wurden ferner die folgenden Aufgaben behandelt.

„Zu zwei in derselben Ebene gegebenen beliebigen Kegelschnitten A und B denjenigen dritten Kegelschnitt C zu finden, in Bezug auf welchen sie einander polar entsprechen, d. h. jeder die Polar-Figur des andern ist."

Es wurde gezeigt, dafs es im Allgemeinen vier solche Kegelschnitte C giebt, von denen jeder der Forderung der Aufgabe genügt, und dafs dieselben auch unter sich eine merkwürdige Beziehung haben, wonach jeder von jedem andern auf eigenthümliche Weise abhängt und dadurch bestimmt wird. — Für die sphärischen Kegelschnitte findet alles gleicherweise statt. — Auch die analoge Aufgabe über Flächen zweiter Ordnung gestattet ähnliche Behandlung; sie läfst im Allgemeinen 8 Auflösungen zu, und die 8 Flächen, welche der Aufgabe genügen, haben ebensolche gegenseitige Beziehung, dafs jede durch jede andere auf eigenthümliche Weise bestimmt wird.

Berlin im März 1846.

7.

Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène.

(Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet* à Berlin.)

Etant donnée une masse quelconque, limitée en tout sens, formant un tout continu ou composée de plusieurs parties séparées, et ayant en chacun de ses points une densité finie, si l'on fait la somme de tous les éléments de cette masse, divisés chacun par sa distance à un point quelconque m, on aura ce que les géomètres sont convenus d'appeler le potentiel de la masse par rapport à ce point. On sait que l'intégrale triple ainsi définie, qui est toujours une fonction déterminée des coordonnées rectangulaires x, y, z du point m, jouit d'un grand nombre de propriétés importantes dont je ne rappelerai ici que celles sur lesquelles porte la remarque qui fait l'objet de cette note.

1) Le potentiel v et ses coëfficients différentiels du premier ordre, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, qui expriment les composantes de l'attraction exercée par la masse au point m, sont des fonctions finies et continues de x, y et z dans toute l'étendue de l'espace.

2) Il existe toujours des limites déterminées que les produits xv, yv, zv, $x^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial v}{\partial z}$, ne sauraient dépasser en aucun point de l'espace.

3) Si l'on fait abstraction des points particuliers autour desquels la densité varie d'une manière brusque, chacune des trois dérivées $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ aura toujours une valeur finie et unique, et ces valeurs simultanées seront telles que

$$(a.) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varrho,$$

ϱ désignant la densité au point (x, y, z), que l'on devra considérer comme nulle lorsque ce point se trouve en dehors de la masse. Pour les points que nous venons d'excepter et qui seront toujours situés sur certaines surfaces, parmi lesquelles se trouveront aussi comprises celles qui servent de limite à la

masse ou du moins les parties de ces dernières où la densité n'est pas nulle, les fonctions $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ auront généralement chacune deux valeurs distinctes, mais toujours finies, qui pour la première, par exemple, seront les deux limites du rapport $\frac{\Delta \frac{\partial v}{\partial x}}{\Delta x}$, qui répondent à une valeur infiniment petite de Δx, positive ou négative. De la combinaison de ces doubles valeurs résulteront en général pour le trinome (*a.*) huit valeurs différentes qu'il n'est pas nécessaire de considérer; il suffit pour notre objet de savoir qu'elles sont toutes finies.

Voici maintenant la remarque très-simple à laquelle les propriétés que nous venons d'énoncer, donnent lieu et qui n'avait pas encore été faite, que je sache. C'est que ces propriétés caractérisent complètement le potentiel v, et qu'il n'existe aucune autre fonction v' qui jouisse de toutes ces propriétés réunies. Pour le prouver, admettons que le contraire ait lieu, et voyons ce qui en résultera pour la différence $v' - v = u$. D'après la nature des propriétés dont il s'agit, il est évident que la nouvelle fonction u satisfera encore aux conditions (1.) et (2.), tandis que l'équation (*a.*) sera remplacée par celle-ci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Il faut toutefois excepter les points mentionnés plus haut; nous savons seulement qu'à de tels points répondent des valeurs finies du trinome. Ces valeurs finies — inconnues pour le moment, mais qui sont effectivement toutes égales à zéro, puisque nous allons voir qu'on a $u = 0$ — n'ayant lieu que le long de certaines surfaces, seront sans aucune influence sur le résultat d'une triple intégration, et nous aurons rigoureusement

$$\iiint u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \partial x \, \partial y \, \partial z = 0,$$

les limites étant quelconques. Étendons chacune des trois intégrations depuis $-a$ jusqu'à $+a$, et considérons en particulier l'intégrale du premier terme. Si nous commençons par l'opération relative à x, l'intégration par parties donnera

$$\int_{-a}^{+a} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \partial x,$$

les indices ajoutés au premier terme indiquant qu'il faut prendre la différence des deux valeurs qui répondent à $+a$ et à $-a$. C'est en effet à cette seule différence que se réduisent les termes que l'intégration par parties produit en dehors du

signe, $u\frac{\partial u}{\partial x}$ étant une fonction continue de x. En opérant d'une manière analogue sur les deux autres intégrales, il viendra

$$\iiint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\partial x\,\partial y\,\partial z$$

$$=\iint\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}\partial y\,\partial z+\iint\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{-a}^{+a}\partial x\,\partial z+\iint\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-a}^{+a}\partial x\,\partial y.$$

En vertu des conditions (2.), la fonction de y et z, qui se trouve sous le signe dans la première intégrale double, sera dans toute l'étendue de cette intégrale numériquement moindre que $\frac{k}{a^3}$, k ne dépendant pas de a; l'intégrale est donc inférieure à $\frac{4k}{a}$, et s'évanouit pour $a=\infty$. La même chose ayant lieu relativement aux deux autres, il s'ensuit que l'intégrale triple, prise entre des limites infinies, est pareillement nulle. Or, la fonction soumise à la triple intégration, étant continue et ne pouvant jamais devenir négative, on conclut qu'elle est identiquement nulle, et par suite que u a une valeur constante, qui ne saurait être que zéro, u devant s'évanouir à l'infini, ce qu'il s'agissait de faire voir.

Le résultat que nous venons d'obtenir, fournit un moyen général de vérifier l'expression du potentiel, lorsque ce potentiel est donné dans toute l'étendue de l'espace. Il suffira pour cela, de s'assurer que l'expression donnée satisfait à toutes les conditions énumérées plus haut.

L'application de ce procédé aux formules connues qui se rapportent à un ellipsoïde homogène, offre peut-être le moyen le plus expéditif d'établir les théorèmes relatifs à cette question célèbre, si toutefois il ne s'agit que d'une simple vérification et si l'on n'a pas en vue une méthode qui conduise naturellement aux résultats supposés inconnus, en même temps qu'elle les démontre.

L'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

le trinome qui en forme le premier membre, sera inférieur ou supérieur à l'unité, selon que le point (x, y, z) sera intérieur ou extérieur à l'ellipsoïde. Dans le second cas, l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}=1,$$

a une racine positive unique σ, qui varie d'une manière continue avec les varia-

bles x, y et z, comme cela résulte de ce que les dérivées $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$, données par les équations

$$(b.)\quad \begin{cases} l\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{2x}{\alpha^2+\sigma}, \quad l\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{2y}{\beta^2+\sigma}, \quad l\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{2z}{\gamma^2+\sigma}, \text{ où} \\ l=\frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}+\frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2}+\frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2} \end{cases}$$

ont des valeurs toujours finies. Cela posé, si nous faisons pour abréger, $D=\sqrt{\left(\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)\right)}$, il s'agira de prouver qu'on a

$$v=\pi\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{\partial s}{D}, \text{ ou}$$

$$v=\pi\int_\sigma^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{\partial s}{D},$$

selon que le point (x, y, z) se trouve dans l'intérieur ou en dehors de la masse, dont la densité est supposée égale à l'unité. La différentiation donne

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2\pi x\int_0^\infty\frac{\partial s}{(\alpha^2+s)D}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2\pi x\int_\sigma^\infty\frac{\partial s}{(\alpha^2+s)D},$$

le terme provenant de la variabilité de la limite σ dans le second cas, s'évanouissant en vertu de l'équation dont σ est racine. Il est manifeste que les premières expressions de v et de $\frac{\partial v}{\partial x}$ et les expressions analogues pour $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, varient d'une manière continue avec les coordonnées x, y, z, et qu'il en est de même de celles qui répondent à un point extérieur; et l'on voit également que la continuité n'est pas non plus rompue à la surface où l'on a $\sigma=0$, ce qui fait coïncider les expressions correspondantes.

Les conditions (2.) ont évidemment lieu pour un point intérieur, et sont déjà comprises pour ce cas dans celles (1.). Pour les vérifier en dehors de l'ellipsoïde, soit λ le plus petit des demi-axes α, β, γ; on aura évidemment, en observant que le facteur de $\frac{\partial s}{D}$ dans la seconde expression de v est moindre que l'unité, et en n'ayant égard qu'aux valeurs numériques,

$$v<\frac{2\pi\alpha\beta\gamma}{(\lambda^2+\sigma)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}<\frac{4\pi\alpha\beta\gamma}{3(\lambda^2+\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme d'un autre côté, l'équation en σ donne, abstraction faite du signe, $x<(\alpha^2+\sigma)^{\frac{1}{2}}$, on en conclut

$$xv<2\pi\alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha^2+\sigma}{\lambda^2+\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x^2\frac{\partial v}{\partial x}<\tfrac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha^2+\sigma}{\lambda^2+\sigma}\right)^{\frac{3}{2}},$$

inégalités dont les seconds membres restent finis, lorsque σ croît depuis zéro jusqu'à l'infini.

Passons aux dérivées du second ordre. On trouve

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2\pi\int_0^\infty \frac{\partial s}{(\alpha^2+s)D}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2\pi\int_\sigma^\infty \frac{\partial s}{(\alpha^2+s)D} + \frac{2\pi x}{(\alpha^2+\sigma)\Delta}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x},$$

Δ désignant la valeur de D qui répond à $s=\sigma$. Ces expressions sont encore finies et déterminées, mais ne coïncident plus à la surface. Si nous ajoutons maintenant à chacune de ces équations les deux équations analogues, et que nous observions qu'on a indéfiniment

$$\int\left(\frac{1}{\alpha^2+s}+\frac{1}{\beta^2+s}+\frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{\partial s}{D} = -\frac{2}{D} + \text{const.},$$

il viendra selon les deux cas,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi, \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \left(\frac{2x}{\alpha^2+\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{2y}{\beta^2+\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{2z}{\gamma^2+\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial z}-4\right)\frac{\pi}{\Delta}.$$

La première de ces deux équations s'accorde déjà avec la condition (*a.*), et pour s'assurer qu'il en est de même de la seconde, il suffira de faire la somme des trois équations (*b.*), multipliées chacune par son second membre, et de supprimer ensuite le facteur commun l, évidemment différent de zéro. On reconnait ainsi que le second membre de la dernière équation s'évanouit, comme cela doit être pour un point extérieur.

Nous avons supposé jusqu'à présent que la masse donnée présentait trois dimensions; lorsque cette masse n'en aura que deux et sera distribuée sur une ou sur plusieurs surfaces, le mode de vérification que nous venons d'exposer, devra subir certaines modifications qui résultent toutefois trop simplement des théorèmes connus qui se rapportent à ce cas, pour qu'il soit nécessaire d'entrer dans de nouveaux détails à cet égard.

8.

Über die Stabilität des Gleichgewichts.

(Von Herrn Prof. *G. Lejeune Dirichlet* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 22. Jan. 1846 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung.)

Wenn auf ein System materieller Puncte anziehende oder abstofsende, blofs von der Entfernung abhängige Kräfte wirken, die entweder nach festen Centren gerichtet sind, oder für die, wenn sie gegenseitig zwischen zwei Massen Statt finden, Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sind, und überdies die Bedingungsgleichungen, welche die Coordinaten der Puncte unter einander verbinden, die Zeit nicht enthalten: so gilt immer das sogenannte Integral der lebendigen Kraft, welches zuerst in seiner ganzen Allgemeinheit von *D. Bernoulli* aufgestellt worden und in der Gleichung

$$\Sigma m v^2 = f(x, y, z, x', \ldots) + C$$

enthalten ist. Das Summenzeichen erstreckt sich auf alle Massen des Systems, von denen jede mit m, ihre Geschwindigkeit mit v bezeichnet ist; und C bedeutet die willkürliche Constante. Die Function der Coordinaten hängt blofs von der Natur der Kräfte ab und läfst sich immer durch eine bestimmte Anzahl unabhängiger Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ausdrücken, wodurch die Gleichung in

$$\Sigma m v^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) + C$$

übergeht. Die Function φ steht in inniger Beziehung zu den Gleichgewichtslagen des Systems, indem die Bedingung, dafs für eine, bestimmten Werthen von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ entsprechende Lage Gleichgewicht Statt finde, mit der zusammenfällt, dafs für diese Werthe das vollständige Differential von φ verschwinde; so dafs also im Allgemeinen für jede Gleichgewichtslage die Function ein Maximum oder Minimum sein wird. Findet wirklich das Maximum Statt, so hat das Gleichgewicht den Character der Stabilität, d. h. das System wird sich, wenn die Puncte aus einer solchen Lage nur wenig verrückt werden und kleine Anfangsgeschwindigkeiten erhalten, im Laufe der Zeit nie über gewisse enge Grenzen hinaus von derselben entfernen.

Der eben erwähnte Satz gehört unstreitig zu den wichtigsten der ganzen Mechanik; auf ihm beruht namentlich die Theorie der kleinen Schwingungen,

welche so viele interessante physicalische Anwendungen in sich begreift, und man mufs sich in der That wundern, dafs die Wahrheit desselben bisher nicht mit der nöthigen Strenge dargethan worden ist. Setzt man voraus, dafs die Gleichgewichtslage oder das Maximum der Function φ den Werthen $\lambda = 0$, $\mu = 0$, ... entspricht, was immer geschehen kann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, so besteht der von ***Lagrange*** *) gegebene Beweis darin, dafs die Entwicklung der Function nach Potenzen von λ, μ, ..., welche mit den Gliedern zweiter Ordnung beginnt, auf diese beschränkt wird, und dafs dann aus dem bekannten Criterium für das Maximum, nach welchem die Glieder zweiter Ordnung als eine Summe von negativen Quadraten dargestellt werden können, Grenzen für λ, μ, ν, ... abgeleitet werden, die sie nicht überschreiten können. Diese Schlufsweise, welche auch bei andern Fragen der Stabilität, und namentlich in der physischen Astronomie nicht selten in Anwendung gebracht wird, ermangelt aber offenbar der Beweiskraft und es kann mit Recht gezweifelt werden, ob Gröfsen, für die man unter der ***Voraussetzung,*** dafs sie immer klein bleiben — denn nur in dieser liegt die Befugnifs, die höhern Glieder zu vernachlässigen — kleine Grenzen findet, nach einer beliebigen Zeit wirklich in diese oder überhaupt nur in enge Grenzen eingeschlossen sein werden.

Der oben erwähnte Beweis ist, so viel ich weifs, bisher ohne wesentliche Veränderung von allen Schriftstellern reproducirt worden, welche sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, und was namentlich ***Poisson*** **) zu demselben hinzugefügt hat, um die Glieder höherer Ordnung zu berücksichtigen, beruht auf der ganz unhaltbaren Annahme, dafs *jedes* Glied zweiter Ordnung den Inbegriff aller höheren Glieder übertreffe. Aber selbst wenn die von ***Lagrange*** angestellten Betrachtungen für den Fall, worauf sie sich beziehen und wo sich das Maximum in den Gliedern zweiter Ordnung zu erkennen giebt, vervollständigt würden, wäre damit der fragliche Satz noch nicht in seinem ganzen Umfange bewiesen. Bekanntlich ist die Existenz eines Maximums mit dem Verschwinden der Glieder zweiter Ordnung verträglich; nur mufs immer die niedrigste Ordnung, für welche nicht sämmtliche Glieder verschwinden, eine gerade sein und das Aggregat aller dieser Glieder immer negativ bleiben. Die vollständigen Criterien für diese letztere Bedingung sind bisher, selbst wenn es sich um die vierte Ordnung handelt, nicht aufgestellt

*) Mécanique analytique, première partie, section III.

**) Traité de Mécanique, tome second, page 492.

worden *); sie wären daher vor Allem aufzusuchen; was nothwendig in den Beweis des mechanischen Satzes grofse Complication bringen würde.

Glücklicherweise läfst sich das Princip der Stabilität des Gleichgewichts unabhängig von diesen Criterien und durch höchst einfache, unmittelbar an den Begriff des Maximums anknüpfende Betrachtungen nachweisen.

Indem wir die obige Voraussetzung beibehalten, dafs die Gleichgewichtslage verschwindenden Werthen von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ entspricht, machen wir noch die zweite: dafs der Werth von $\varphi(0, 0, 0, \ldots.)$ ebenfalls Null ist; was wegen der willkürlichen Constante gestattet ist. Bestimmt man nun die Constante aus dem gegebenen Anfangszustande, für welchen $v, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ mit $v_0, \lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots$ bezeichnet werden sollen, so erhält man

$$\Sigma m v^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \Sigma m v_0^2.$$

Vermöge der Annahme, dafs $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ für $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\ldots$ ein Maximum ist, dessen Werth selbst verschwindet, lassen sich nun immer so kleine positive Gröfsen $l, m, n, \ldots$ angeben, dafs für jedes System $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, wenn die Zahlenwerthe dieser Variabeln respective nicht gröfser als $l, m, n, \ldots$ sind, $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ stets negativ ist; den einzigen Fall ausgenommen, wo $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ gleichzeitig verschwinden. Dieser Fall wird ausgeschlossen, wenn wir nur solche Systeme betrachten, in welchen wenigstens eine der Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, abgesehen vom Zeichen ihrer Grenze, $l, m, n, \ldots$ gleich ist. Ist von allen diesen negativen Werthen der Function, $-p$, abgesehen vom Zeichen, der kleinste, so läfst sich leicht zeigen, dafs wenn $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots$ numerisch kleiner als $l, m, n, \ldots$ genommen werden und zugleich der Bedingung

$$-\varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \Sigma m v_0^2 < p$$

Genüge geschieht, jede der Variabeln, $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ im Laufe der Bewegung numerisch unter ihrer Grenze $l, m, n, \ldots$ bleiben wird. Fände das Gegentheil Statt, so müfste, da die anfänglichen Werthe $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots$ der Voraussetzung nach die eben ausgesprochene Bedingung erfüllen und bei der Stetigkeit der Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, zu einer gewissen Zeit zuerst Gleichheit zwischen einem oder mehreren der Zahlenwerthe von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ und der entsprechenden Grenze $l, m, n, \ldots$ eintreten, ohne dafs einer der übrigen diese noch überschritten hätte. Für diesen Zeitpunct wäre der negative Werth von $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ numerisch nicht kleiner als p, und also die zweite Seite unserer

*) Théorie des fonctions, seconde partie, n°. 57.

Gleichung wegen der obigen auf den Anfangszustand sich beziehenden Ungleichheit negativ; was mit der Natur der ersten Seite in Widerspruch steht. Zugleich ist klar, dafs auch die Geschwindigkeiten v immer in Grenzen eingeschlossen bleiben werden, da stets

$$\Sigma m v^2 \leqq \Sigma m v_0^2 - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots)$$

sein wird; so wie auch, dafs die Grenzen für jedes v, so wie für jede der die Lage des Systems bestimmenden Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, beliebig enge gemacht werden können, da $l, m, n, \ldots$ jedes Grades von Kleinheit fähig sind.

Schliefslich wollen wir noch auf einen merkwürdigen, bei verschiedenen Schriftstellern vorkommenden Irrthum aufmerksam machen, welcher den eben besprochenen Gegenstand betrifft *). Es wird behauptet, dafs, wenn das System im Laufe der Bewegung durch mehrere Gleichgewichtslagen hindurch geht, diese abwechselnd Lagen des stabilen und unstabilen Gleichgewichts, d. h. solche sind, denen ein Maximum oder Minimum der Function $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ entspricht; und diese Behauptung wird darauf gegründet, dafs 1°. ein Maximum oder Minimum diesen Character nicht verliert, wenn die früher als unabhängig betrachteten Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ die besondern Werthe, für welche ein solches Statt findet, dadurch erhalten, dafs sie Functionen von einer neuen Gröfse t werden, und dann 2°. darauf, dafs bei einer Function einer einzigen Variabele t Maxima und Minima einander abwechselnd folgen. Beides ist richtig, berechtigt aber nicht zu der daraus gezogenen Folgerung; es wäre vielmehr erforderlich, dafs das Erstere auch umgekehrt gültig bliebe, d. h. dafs die blofs von t abhängige Function $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, wenn sie für ein bestimmtes t ein Maximum oder Minimum darbietet, dieselbe Eigenschaft behielte, wenn man die entsprechenden Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ als besondere Werthe der als unabhängige Variabeln betrachteten Gröfsen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ansieht; was aber nicht der Fall zu sein braucht, selbst dann nicht, wenn nur eine Gröfse, z. B. λ, vorkommt. So hat die Function λ^2 nur ein Minimum und gar kein Maximum, während für die Function $\sin^2 t$, in welche jene durch die Annahme $\lambda = \sin t$ übergeht, nicht nur unendlich viele Minima, welche einander und dem frühern gleich sind, sondern überdies unendlich viele Maxima Statt finden. Der Irrthum, in welchen man in dieser Beziehung verfallen ist, mufs um so mehr befremden, als die Unrichtigkeit der aufgestellten Behauptung sich schon bei der gewöhnlichen Pendelbewegung zu erkennen giebt.

*) Traité de Mécanique par *Poisson*, tome second, page 491.

9.

Eine Bemerkung zur Zahlentheorie.

(Von Herrn Prof. Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Wenn p eine Primzahl von der Form $8n+1$ und daher $p = c^2 + 2d^2$ ist, so hat man

$$1. \quad \pm 2c \equiv \frac{4n+1 \cdot 4n+2 \cdots 5n}{1 \cdot 2 \cdots n} \pmod{p}.$$

Dieses Theorem, welches in einem Aufsatze des Herrn Prof. *Jacobi* im 2ten Hefte des 30sten Bandes dieses Journals (S. 168) vorkommt, habe ich vor langer Zeit durch Induction gefunden und in etwas anderer Gestalt bekannt gemacht (Jahrbücher f. wissensch. Critik 1831 pg. 679), nemlich

$$2. \quad \pm 2c \equiv \frac{4n \cdots 3n+1}{1 \cdots n} \pmod{p}.$$

Dasselbe Theorem läfst sich aber noch einfacher ausdrücken. Es ist nemlich auch

$$3. \quad \pm 2c \equiv \frac{2n \cdots n+1}{1 \cdots n} \pmod{p},$$

und in dieser Formel mufs das obere oder das untere Zeichen genommen werden, je nachdem c entweder in den Formen $8m+1$ und $8m+3$, oder in den Formen $8m+5$ und $8m+7$ enthalten ist.

Der Zusammenhang zwischen den Formeln (1.) und (2.) und der Formel (3.) ist nachzuweisen. Man hat nemlich

$$2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n,$$
$$2^n(4n+1 \cdots 5n) \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1,$$

mithin

$$4. \quad 2^{2n}(4n+1 \cdots 5n) \equiv n+1 \cdots 2n.$$

Nun ist

$$2^{2n} \equiv \pm 1,$$

also

$$5. \quad \pm 1 \equiv \frac{5n \cdots 4n+1}{n+1 \cdots 2n};$$

wo das obere oder das untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem die Zahl 2 ein biquadratischer Rest oder Nichtrest ist, d. h. je nachdem c in den

Formen $8m+1$ und $8m+7$ oder in den Formen $8m+3$ und $8m+5$ enthalten ist. Multiplicirt man die Formel (5.) mit der Formel (3.), so erhält man die Formel (1.), und man sieht, dafs in letzterer Formel das obere oder das untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem c in der Form $4n+1$ oder in $4n+3$ enthalten ist; wie es auch Herr Prof. ***Jacobi*** angegeben hat.

Die Formel (2.) gilt aber auch noch, wenn p eine Primzahl von der Form $8n+3$ ist, und es scheint mir hierin ein Beweis zu liegen, dafs die Theorie der Reste nicht die eigentliche Quelle solcher Sätze ist. Man hat nemlich, wenn $p=8n+3=c^2+2d^2$ ist,

$$6. \qquad \pm 2c \equiv \frac{4n+1\cdots 3n+2}{1\cdots n},$$

und es mufs das obere oder das untere Zeichen genommen werden, je nachdem c entweder $=8m+7$, $8m+5$, oder $=8m+1$, $8m+3$ ist. Hieraus folgt, unter denselben Bedingungen:

$$7. \qquad \pm 2c \equiv (-1)^n \cdot \frac{4n+2\cdots 5n+1}{1\cdots n}$$

und, mit Rücksicht auf die Congruenz

$$2^{2n}(4n+2\cdots 5n+1) \equiv n+1\cdots 2n,$$

auch

$$8. \qquad \pm 2^{2n+1}\cdot c \equiv (-1)^n \cdot \frac{2n\cdots n+1}{1\cdots n}.$$

10.
Zur näherungsweisen Kreis-Quadratur.

Die bei *Nestler* und *Melle* in Hamburg herausgekommene kleine Schrift „Über die Rectification der Peripherie des Kreises, von *Nicolai Nawrotzki*, Doctor der Phil. an der Univ. zu Leipzig und Mitglied der Kaiserl. Russ. Akademie der Wiss. etc." lehrt wieder die Zeichnung einer geraden Linie, deren Länge dem halben Kreis-Umfang nahe kommt. Diese Linie ist wegen ihrer starken Annäherung an den Kreis-Umfang und wegen der ungemeinen Einfachheit des Verfahrens, durch welches sie gefunden wird, bemerkenswerth.

Man ziehe in Fig. 1. Taf. I. HZ durch C mit AB parallel, mache $AS = AO$, ziehe OST und mache $TZ = 3AO$, so ist die gerade Linie DZ nur etwa um den 17000ten Theil des Halbmessers kürzer, als der halbe Kreis-Umfang ACB.

Denn wegen $AS = AO$ ist TC die halbe Seite des um den Kreis beschriebenen regelmäfsigen Sechsecks und folglich $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, wenn der Halbmesser $AO = 1$ gesetzt wird: mithin ist, weil $TZ = 3$ sein soll, $CZ = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, und da $CD = 2$ ist, $DZ = \sqrt{\left(2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \sqrt{(4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3})} = \sqrt{(13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3})} = 3{,}141533$. Der halbe Kreis-Umfang ACB ist $= 3{,}141593$, also ist DZ nur um $3{,}141593 - 3{,}141533 = 0{,}00006$ oder etwa um den 17000ten Theil des Halbmessers kürzer als der halbe Kreis-Umfang ACB.

Macht man $ZK = ZD$, so ist die Fläche des geradlinigen gleichschenkligen Dreiecks KZD ebenfalls nur um etwa den 17000ten Theil kleiner als die Fläche des Kreises $ACBD$: denn die Fläche jenes Dreiecks ist $= \frac{1}{2} KZ \cdot CD = \frac{1}{2} KZ \cdot 2 = KZ$ und die Fläche des Kreises ist $2 \cdot ACB \cdot \frac{1}{2} AO = 2 \cdot ACB \cdot \frac{1}{2} = ACB$, und KZ kommt ACB bis auf etwa den 17000ten Theil nahe.

Es wäre auch noch zu bemerken, dafs, wenn man ZA zieht, die Fläche des geradlinigen Dreiecks DZE bis auf etwa den 280ten Theil der *halben* Kreisfläche gleich ist. Denn es ist $\triangle CDZ = \frac{1}{2} CZ \cdot CD = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\triangle CEZ = \frac{CZ^2}{HZ^2} \cdot \triangle AHZ = \frac{CZ^2}{HZ^2} \cdot \frac{1}{2} HZ \cdot HA = \frac{1}{2} \frac{CZ^2}{HZ} = \frac{\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)},$$ also

$\Delta DZE = \Delta CDZ - \Delta CEZ = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\left(4-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ oder $2\Delta DZE =$

$\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2-\frac{3-\frac{1}{\sqrt{3}}}{4-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8-\frac{2}{\sqrt{3}}-3+\frac{1}{\sqrt{3}}}{4-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(5-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{4-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= 3{,}13048$ und $\Delta DZE = 1{,}56524$. Die Fläche des Halbkreises ACB ist $= \frac{1}{2} \cdot 3{,}14593 = 1{,}57079$, also ist das Dreieck DZE nur um $1{,}57079 - 1{,}56524 = 0{,}00555$ oder um etwa den 280ten Theil kleiner als der Halbkreis.

Es giebt bekanntlich mehrere Mittel, durch Zeichnung eine gerade Linie zu finden, deren Länge der des Kreis-Umfanges oder einem bestimmten Theile desselben nahe kommt. Ein Paar solcher Mittel finden sich im 3ten Bande dieses Journals S. 83 und 405. Ich weifs nicht, ob irgendwo schon angemerkt ist, dafs derjenige *Cosinus*, welcher der zugehörigen *Tangente gleich* ist, zugleich der Länge des 8ten Theils des Kreis-Umfanges bis auf etwa den 1343ten Theil nahe kommt. Jener Winkel beträgt etwa 38 Grad und $11\frac{1}{2}$ Minuten. Setzt man nemlich $\cos x = \text{tang}\, x$, so folgt daraus $\sin x = \cos x^2 = 1 - \sin x^2$, also $\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \cos x^2$, und mithin, da $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0{,}61803398875$ ist, $\cos x = 0{,}786151$. Der 8te Theil des Kreis-Umfanges ist $= 0{,}785398$, mithin ist $\cos x$ nur um $0{,}786151 - 0{,}785398 = 0{,}000753$ oder um etwa den 1343ten Theil länger als der 8te Theil des Kreis-Umfanges. Macht man also auf AF in der Figur $AQ = AO$, so ist $QF = \sqrt{5}-1$; denn AF^2 ist $= AB^2 + BF^2 = 5$. Macht man hierauf $BG = QF$ und zieht $OPLN$ aus O auf BG senkrecht, so ist $BP = \frac{1}{2}BG = LM = \sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, folglich $LOB = x$ und $OM = \cos x = OP = NB = \text{tang}\, x$, mithin ist das Perpendikel OP aus O auf die Sehne $GB = QF$ dem halben Kreis-Umfangsviertel BC bis auf etwa den 1343ten Theil gleich. Die Seite des regelmäfsigen eingeschriebenen Zehnecks ist bekanntlich $= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, also ist der Sinus $LM = PB = \sin x$ das Doppelte dieser Seite.

Berlin im März 1846.

11.

Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind.

(Von Herrn Oberlehrer Dr. *Schönemann* am Gymnasio zu Brandenburg an der Havel.)

(Fortsetzung und Schlufs der Abhandlung Nr. 22. im vorigen Bande.)

§. 51.

Die Begriffe von einfachen und irreductibeln Ausdrücken von x sollen auch auf zusammengesetzte Moduln angewendet werden.

Es läfst sich sogleich übersehen, dafs jeder Ausdruck, in welchem der Coëfficient der höchsten Potenz von x mit dem Modul keinen Factor gemeinschaftlich hat, sich nach demselben dem Producte eines einfachen Ausdrucks und des Coëfficienten der höchsten Potenz congruent setzen lasse. (Vergl. §. 2.)

§. 52.

Lehrsatz. Ist der Modul die m^{te} Potenz einer Primzahl p, und das Product zweier Ausdrücke von x ist $\equiv 0 \pmod{p^m}$, so mufs der zweite Ausdruck $\equiv 0 \pmod{p^n}$ sein, wenn der erste Ausdruck nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist.

Bezeichnet man also jene beiden Ausdrücke durch $f_1 x$ und $f_2 x$, ist $f_1 x f_2 x \equiv 0 \pmod{p^m}$, und weifs man, dafs $f_1 x$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so mufs $f_2 x \equiv 0 \pmod{p^m}$ sein.

Beweis. Zunächst folgt $f_2 x \equiv 0 \pmod{p}$ (§. 4.); daher kann man $f_2 x = p f_3 x$ setzen, wo $f_3 x$ einen Ausdruck von x bedeutet. Da nun $p f_1 x f_3 x \equiv 0 \pmod{p^m}$ ist, so mufs $f_1 x f_3 x \equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$ sein. Nun mufs wieder (§. 4.) $f_3 x \equiv 0 \pmod{p}$ sein, wenn m gröfser als 1 ist, und man kann $f_3 x = p f_4 x$ und $f_2 x = p^2 f_4 x$ setzen. Durch fortgesetzte Anwendung derselben Schlufsfolge erhält man zuletzt $f_2 x = p^m f_{2+m} \equiv 0 \pmod{p^m}$.

Zusatz. Ist $ax \cdot bx \equiv cx \cdot dx \pmod{p^m}$, wo ax, bx, cx und dx Ausdrücke von x bedeuten, und weifs man, dafs $ax \equiv cx \pmod{p^m}$ ist, dafs aber diese beiden Ausdrücke nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sind: so mufs auch $bx \equiv dx \pmod{p^m}$ sein. Da nämlich aus obiger Congruenz leicht folgt, dafs $ax(bx - dx) \equiv 0 \pmod{p^m}$ sein müsse, und da nach der Voraussetzung ax nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so mufs $bx - dx \equiv 0 \pmod{p^m}$ oder $bx \equiv dx \pmod{p^m}$ sein.

§. 53.

Lehrsatz. Wenn

$(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(A+pFx)\equiv(x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)(A_1+pF_1x)\pmod{p^m}$

ist und $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n, A$ und A_1 bedeuten ganze Zahlen, von welchen A und A_1 nicht $\equiv 0 \pmod p$ sind, und Fx und F_1x sind Ausdrücke von x: so ist auch $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n \pmod{p^m}$ und $A+pFx\equiv A_1+pF_1x \pmod{p^m}$.

Beweis. Zunächst folgt der Satz für $m=1$ unmittelbar, und man kann daher $x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots b_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n+p(c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots c_{n-1})$ und $A_1=A+pz$ setzen, wo $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ und z ganze Zahlen bedeuten. Setzt man nun $z+F_1x=F_2x$, so erhält man $(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(A+pFx)$ $\equiv(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n+p(c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots c_{n-1}))(A+pF_2x) \pmod{p^m}$ und hieraus

$$(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(p(Fx-F_2x))$$
$$\equiv p(c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1})(A+pF_2x) \pmod{p^m},$$ und daher
$$(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(Fx-F_2x)$$
$$\equiv (c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1})(A+pF_2x) \pmod{p^{m-1}}.$$

Ist nun m gröfser als 1, so findet die letzte Congruenz gewifs auch in Bezug auf den Modul p Statt. Da aber rechts das Glied ausfällt, welches x^n enthält, so mufs das Gleiche auch auf der linken Seite geschehen. Dies kann aber nur erfolgen, wenn $Fx-F_2x=0 \pmod p$ ist. Setzt man demnach $Fx-F_2x=pF_3x$, so erhält man, da $A+pF_2x$ nicht $\equiv 0 \pmod p$ sein kann, $c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}\equiv 0 \pmod p$. Setzt man daher den Ausdruck $c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=p\varphi x$, wo φx einen Ausdruck von x bedeutet, der den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigen kann, so erhält man $(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)F_3x \equiv \varphi x(A+pF_2x) \pmod{p^{m-2}}$ und $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n = x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n+p^2\varphi x$, und mithin $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \pmod{p^2}$.

Ist m gröfser als 2, so mufs auch die Congruenz $(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)F_3x$ $\equiv\varphi x(A+pF_2x) \pmod p$ Statt finden. Da nun φx von einem geringeren Grade als dem n^{ten} ist, so mufs, wie vorhin, $F_3x\equiv 0 \pmod p$ sein. Man kann daher $F_3x=pF_4x$ setzen, wo F_4x einen Ausdruck von x bedeutet; und hiernach mufs nun auch $\varphi x\equiv 0 \pmod p$ sein, oder es mufs sich $\varphi x=p\varphi_1x$ setzen lassen, wo φx einen Ausdruck von x bedeutet. Hiernach erhält man $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n+p^3\varphi_1x$, und mithin $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \pmod{p^3}$.

Durch fortgesetzte Anwendung derselben Schlüsse beweiset man zunächst, dafs $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n \pmod{p^m}$ sei. Nachdem dies bewiesen ist, folgt auch, dafs $A + pFx \equiv A_1 + pF_1 x \pmod{p^m}$ ist (§. 52. Zus.).

§. 54.

Lehrsatz. Jeder Ausdruck von der Form $a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-n} x^n + a_{\nu-n+1} x^{n-1} + \cdots + a_\nu$, in welchem sämmtliche Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{\nu-n-1}$ nach dem Modul p congruent 0 sind, $a_{\nu-n}$ aber nicht congruent 0 nach dem Modul p ist, läfst sich nach dem Modul p^m einem Product von der Form $(x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n)(A + pFx)$ congruent setzen, wo $b_1, b_2, \ldots b_n$ und A ganze Zahlen sind, Fx aber einen Ausdruck vom Grade $\nu - n$ bedeutet.

Beweis. Man bestimme $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ so, dafs $a_{\nu-n} x^n + a_{\nu-n+1} x^{n-1} + \cdots a_\nu \equiv a_{\nu-n}(x^n + \beta_1 x^{n-1} + \cdots \beta_n) \pmod{p}$ wird (§. 2.). Nun giebt es offenbar p^{m-1} Zahlen, die nach dem Modul p einer gegebenen Zahl, etwa β_1, congruent, nach dem Modul p^m aber verschieden sind; diese Zahlen sind nämlich $\beta_1, \beta_1 + p, \beta_1 + 2p, \ldots \beta_1 + (p^{m-1} - 1)p$. Da nun der Ausdruck $x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n$, n Coëfficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ hat, so folgt leicht aus der Combinationslehre, dafs es $p^{(m-1)n}$ einfache Ausdrücke geben wird, die mit $x^n + \beta_1 x^{n-1} + \cdots \beta_n$ nach dem Modul p congruent und die unter sich nach dem Modul p^m sämmtlich verschieden sein werden. Die Totalität dieser Ausdrücke wollen wir die erste Classe nennen.

Setzt man für A irgend eine unveränderliche Zahl, die $\equiv a_{\nu-n} \pmod{p}$ ist, so giebt es so viele Ausdrücke von der Form $A + pFx$, die nach dem Modul p^m verschieden sind, als Ausdrücke, die nach dem Modul p congruent 0 und nach dem Modul p^m verschieden sind. Da aber Fx im Allgemeinen ein vielfacher Ausdruck vom Grade $\nu - n$ ist, also $\nu - n + 1$ veränderliche Coëfficienten in sich schliefst, so folgt, wie vorhin, dafs es $p^{(m-1)(\nu-n+1)}$ Ausdrücke geben werde, die nach dem Modul p mit $A + pFx$ congruent sind, die aber nach dem Modul p^m verschieden sind. Die Totalität dieser Ausdrücke wollen wir die zweite Classe nennen.

Offenbar kann man nun $p^{(m-1)n} \cdot p^{(m-1)(\nu-n+1)} = p^{(m-1)(\nu+1)}$ Producte bilden, die einen Factor aus der ersten Classe und einen aus der zweiten Classe in sich schliefsen. Alle diese Producte werden (§. 53.) nach dem Modul p^m verschieden, aber offenbar nach dem Modul p congruent sein. Nun giebt es aber im Ganzen nur $p^{(m-1)(\nu+1)}$ Ausdrücke, die mit

$$a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-n} x^n + \cdots + a_\nu$$

nach dem Modul p congruent, aber nach dem Modul p^m unter sich verschie-

schieden sind: es mufs also auch dieser Ausdruck sich einem Product zweier Factoren aus der ersten und zweiten Classe congruent setzen lassen.

§. 55.

Lehrsatz. Ist das Product eines Ausdrucks, der nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, und eines einfachen, nach dem Modul p^m irreductibeln Ausdrucks dem Producte zweier andern Ausdrücke von x nach demselben Modul congruent, so hat einer derselben den irreductibeln Ausdruck nach dem Modul p^m zum Divisor, wenn der andre Ausdruck sich nicht durch den irreductiblen Ausdruck in Bezug auf den Modul p dividiren läfst.

Beweis. Ist der irreductible Ausdruck vom 1ten Grade, so läfst sich der Beweis wie in §. 5. führen.

Wir wollen nun voraussetzen, der Satz sei bis zu dem Grade n bewiesen, und zeigen, er gelte auch für den Grad $n+1$. Es sei demnach φx ein nach dem Modul p^m irreductibler, einfacher Ausdruck vom Grade $n+1$ und $\varphi x\, fx \equiv Ax\, Bx \pmod{p^m}$, und fx sei nicht $\equiv 0 \pmod{p}$. Ferner bezeichne man den algebraischen Quotienten, den man erhält, wenn man Bx durch φx dividirt, durch Qx, und den Rest, welcher den n^{ten} Grad nicht überschreiten kann, durch Rx, so erhält man $\varphi x(fx - Ax\, bx) \equiv Ax\, Rx \pmod{p^m}$. Wäre nun Rx nicht $\equiv 0 \pmod{p}$, so kann man $Rx \equiv gx(h+pFx) \pmod{p^m}$ setzen, wo gx einen einfachen Ausdruck von x anzeigt, Fx irgend einen Ausdruck von x, und h eine ganze Zahl, die nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, und wo die Summe der Zahlen, welche die Grade von gx und Fx angeben, gleich dem Grade von Rx ist (§. 54.). Man erhält nun $\varphi x(fx - Ax\, Qx) \equiv Ax \cdot gx(h+pFx) \pmod{p^m}$. Da aber gx nur irreductible einfache Factoren von einem geringern Grade als dem $(n+1)^{\text{ten}}$ einschliefsen kann, so müssen diese auch in $fx - Ax \cdot Qx$ enthalten sein, indem φx irreductibel ist. Setzt man nun $fx - Ax \cdot Qx \equiv gx\, Q_1 x \pmod{p^m}$, so erhält man leicht $\varphi x \cdot Q_1 x \equiv Ax(h+pFx) \pmod{p^m}$. Da aber nach der Voraussetzung φx und fx nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sind, so kann auch Ax nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sein. Man kann daher $Ax \equiv A_1 x(h_1 + pF_1 x) \pmod{p^m}$ setzen, wo $F_1 x$ ein Ausdruck von x, $A_1 x$ ein einfacher Ausdruck von x, und h_1 eine Zahl ist, die nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Hieraus erhält man $\varphi x\, Q_1 x \equiv A_1 x(h_1 + pF_1 x)(h+pFx) \pmod{p^m}$. Da aber $Q_1 x$ auch nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sein kann, so kann man $Q_1 x \equiv Q_2 x(h_2 + pF_2 x) \pmod{p^m}$ setzen, wo $Q_2 x$ ein einfacher Ausdruck, und h_2 nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Daraus ergiebt sich

$\varphi x\, Q_2 x(h_2+pF_2x) \equiv A_1 x(h_1+pF_1x)(h+pFx)$ (mod. p^m). Da nun $\varphi x\, Q_2 x$ und $A_1 x$ einfache Ausdrücke, und h, h_1 und h_2 nicht $\equiv 0$ (mod. p) sind, so folgt leicht, dafs $\varphi x\, Q_2 x \equiv A_1 x$ (mod. p^m) (§. 53.) und dafs mithin φx ein Factor von $A_1 x$ und daher auch von Ax in Bezug auf den Modul p^m sei.

§. 56.

Zwei Ausdrücke derselben Wurzel α eines nach dem Modul p^m irreductiblen einfachen Ausdrucks fx sollen auch hier nach dem Modul p^m, α congruent heifsen, wenn sich der eine von ihnen als eine Summe des andern und eines p^mfachen Ausdrucks dieser Wurzel darstellen läfst.

Es folgt dann, wie in §. 14., dafs, wenn $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p^m, α) ist, auch fx in Bezug auf den Modul p^m ein Theiler von $\varphi x - \psi x$ sein mufs; und umgekehrt.

§. 57.

Lehrsatz. Wird ein Ausdruck von α, der nicht $\equiv 0$ (mod. p, α) ist, in einen zweiten Ausdruck von α multiplicirt, so kann das Product nicht $\equiv 0$ (mod. p^m, α) werden, wenn nicht der zweite Ausdruck $\equiv 0$ (mod. p^m, α) ist.

Gesetzt $\varphi\alpha$ sei ein Ausdruck von α, der nicht $\equiv 0$ (mod. p, α) ist, und $\varphi\alpha \cdot \psi\alpha \equiv 0$ (mod. p^m, α), so ist zu zeigen, dafs $\psi\alpha \equiv 0$ (mod. p^m, α) ist.

Beweis. Da $\varphi\alpha \cdot \psi\alpha \equiv 0$ (mod. p^m, α) ist, so mufs $\varphi x \cdot \psi x$ durch den einfachen und in Bezug auf den Modul p^m irreductibeln Ausdruck fx dividirbar sein. Man kann also $\varphi x \cdot \psi x \equiv fx \cdot qx$ (mod. p^m) setzen, wo qx ein Ausdruck von x ist. Setzt man nun $\varphi x = fx \cdot Qx + Rx$, wo Qx den Quotienten bedeutet, den man bei der Division von φx durch fx erhält, und Rx den Rest: so kann Rx nicht $\equiv 0$ (mod. p) sein, weil sonst $\varphi\alpha \equiv 0$ (mod. p, α) wäre. Da also φx in Bezug auf den Modul p nicht durch fx theilbar ist, so mufs ψx in Bezug auf den Modul p^m durch fx theilbar sein (§. 52.). Hieraus folgt aber $\psi\alpha \equiv 0$ (mod. p^m, α).

§. 58.

Lehrsatz. Ist das Product zweier einfacher Ausdrücke von x dem Product zweier anderer einfacher Ausdrücke von x nach dem Modul p^m congruent: haben ferner die Factoren eines solchen Products nach dem Modul p keinen gemeinschaftlichen Factor, und sind die Factoren des einen Products denen des andern nach dem Modul p congruent: so müssen sie auch nach dem Modul p^m congruent sein.

Bedeuten also fx, f_1x, gx und g_1x Ausdrücke von x, und ist $fx \equiv f_1x$ (mod. p) und $gx \equiv g_1x$ (mod. p), ferner $fx \cdot gx \equiv f_1x \cdot g_1x$ (mod. p^m),

so mufs auch $fx \equiv f_1 x \pmod{p^m}$ und $gx \equiv g_1 x \pmod{p^m}$ sein, wenn fx und gx nach dem Modul p keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Beweis. Zum Beweise setze man $f_1 x = fx + p\varphi x$ und $g_1 x = gx + p\gamma x$, wo φx und γx Ausdrücke von x bedeuten, so ist

$$fx \cdot gx \equiv (fx + p\varphi x)(gx + p\gamma x) \pmod{p^m}.$$

Zunächst bemerke man, dafs $p\varphi x$ und $p\gamma x$ von geringerem Grade sein müssen, als $f_1 x$ und $g_1 x$ oder fx und gx, weil diese vier Ausdrücke nach der Voraussetzung einfach sind. Wäre nun α eine Wurzel eines nach dem Modul p^m irreductibeln einfachen Ausdrucks von x, der nach demselben Modul ein Factor von fx ist, und selbst ex heifsen mag: so folgt aus der Congruenz $fx \cdot gx \equiv (fx + p\varphi x)(gx + p\gamma x) \pmod{p^m}$ die folgende: $0 \equiv p\varphi\alpha(g\alpha + p\gamma\alpha) \pmod{p^m, \alpha}$. Da aber fx und gx nach dem Modul p keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann $g\alpha$ nicht $\equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ sein, und es folgt (§. 57.), dafs $p\varphi\alpha \equiv 0 \pmod{p^m, \alpha}$ sei, und daher, dafs $p\varphi x$ den Factor ex in Bezug auf den Modul p^m in sich schliefse (§. 56.). Setzt man daher $fx \equiv ex \cdot f_2 x \pmod{p^m}$ und $p\varphi x \equiv pex \cdot \varphi_2 x \pmod{p^m}$, so leitet man durch Division mit ex aus der obigen Congruenz nach (§. 52. Zus.) leicht die Congruenz $f_2 x \cdot gx \equiv (f_2 x + p\varphi_2 x)(gx + p\gamma x) \pmod{p^m}$ her. Nun folgt aber wieder, dafs $p\varphi_2 x$ in Bezug auf den Modul p^m jeden einfachen Factor mit $f_2 x$ gemeinschaftlich haben müsse. Durch fortgesetzte Schlüsse derselben Art beweiset man, dafs $p\varphi x$ dieselben Factoren in Bezug auf den Modul p^m enthalte, wie fx. Dies geht aber nur an, wenn $p\varphi x \equiv 0 \pmod{p^m}$ ist, weil es von einem geringeren Grade als fx ist. Ist aber $p\varphi x \equiv 0 \pmod{p^m}$, so ist $f_1 x \equiv fx \pmod{p^m}$, und ebenso $g_1 x \equiv gx \pmod{p^m}$.

§. 59.

Lehrsatz. Ist irgend ein einfacher Ausdruck von x nach dem Modul p in zwei einfache Factoren zerlegbar, die nach demselben Modul keinen gemeinschaftlichen Divisor haben: so ist dieser Ausdruck auch nach dem Modul p^m, ***aber nur auf eine Weise,*** in zwei Factoren zerlegbar, welche jenen beiden ersten nach dem Modul p congruent sind.

Bedeuten also Fx, fx, $f_1 x$, Qx und $Q_1 x$ einfache Ausdrücke von x, ist $Fx \equiv fx\,Qx \pmod{p}$, und haben fx und Qx keinen gemeinschaftlichen Factor nach dem Modul p, so läfst sich auf eine, ***aber nur auf eine*** Weise, $Fx \equiv f_1 x\, Q_1 x \pmod{p^m}$ setzen, so dafs $f_1 x \equiv fx \pmod{p}$ und $Q_1 x \equiv Qx \pmod{p}$ wird.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Beweis. Es sei fx vom Grade n, so giebt es $p^{(m-1)n}$ verschiedene einfache Ausdrücke nach dem Modul p^m, die, nach dem Modul p genommen, mit fx congruent werden. Bezeichnet nämlich a_1 irgend einen Coëfficienten von fx, so ist die Reihe der Ausdrücke a_1, a_1+p, a_1+2p, ... $a_1+(p^{m-1}-1)p$ congruent, aber nach dem Modul p^m verschieden. Da also in fx an die Stelle jedes Coëfficienten p^{m-1} verschiedene Werthe treten können, wenn man statt p den Modul p^m einführt, und da fx, aufser dem Coëfficienten der höchsten Potenz von x, welcher 1 ist, n Coëfficienten hat, so kann dieser Ausdruck $p^{(m-1)n}$ Werthe annehmen, die nach dem Modul p^m verschieden, aber nach dem Modul p congruent sind. Ist nun Qx vom Grade ν, so kann dieser Ausdruck nach dem Modul p^m ebenfalls $p^{(m-1)\nu}$ verschiedene Werthe erhalten. Multiplicirt man einen Ausdruck von fx mit einem Ausdruck von Qx, so erhält das Product den Grad $n+\nu$. Man kann aber wie vorhin schliefsen, dafs es $p^{(m-1)(n+\nu)}$ einfache Ausdrücke nach dem Modul p^m geben werde, die nach dem Modul p mit jenem Product, oder auch mit Fx congruent und nach dem Modul p^m unter sich verschieden sind. Nun giebt es $p^{(m-1)n}$ Ausdrücke, die an die Stelle von fx, und $p^{(m-1)\nu}$ Ausdrücke, die an die Stelle von Qx treten können: also kann man offenbar $p^{(m-1)n}.p^{(m-1)\nu}=p^{(m-1)(n+\nu)}$ Producte bilden, deren Factoren fx und Qx nach dem Modul p beide congruent und nach dem Modul p^m nicht beide congruent sind. Da alle diese Producte auch nach dem Modul p^m verschieden sein müssen, weil ihre beiden Factoren nach der Voraussetzung keinen gemeinschaftlichen Theiler in Bezug auf den Modul p einschliefsen (§. 54.) und es überhaupt nur $p^{(m-1)(n+\nu)}$ verschiedene Ausdrücke nach dem Modul p^m giebt, die mit Fx congruent werden, so folgt, dafs jeder dieser Ausdrücke, also auch Fx, sich nach dem Modul p^m auf eine Weise in zwei Factoren zerfällen lasse, die nach dem Modul p mit fx und Qx congruent werden.

§. 60.

Aus dem vorigen Paragraph ergiebt sich, dafs es bei einer Untersuchung über die Möglichkeit der Zerfällung gegebener Ausdrücke von x nach dem Modul p^m nur darauf ankommt, solche Ausdrücke zu untersuchen, die nach dem Modul p Potenzen von irreductiblen Ausdrücken sind. Denn es mufs jeder Ausdruck, der nach dem Modul p^m irreductibel ist, auch nach dem Modul p irreductibel, oder die Potenz eines irreductibeln Ausdrucks sein.

Demnach ergiebt sich hier ganz naturgemäfs folgende Aufgabe:

§. 61.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Potenz eines nach dem Modul p irreductibeln Ausdrucks, nach dem Modul p^m irreductibel sei, oder nicht.

Da es indessen scheint, als wenn die Lösung dieser Aufgabe im Allgemeinen sich nicht einfach geben lasse, so soll sie auf den Modul p^2 eingeschränkt und es soll zunächst untersucht werden, in welchem Fall der Ausdruck $(x-a)^n+pFx$, wo a eine ganze Zahl und Fx einen Ausdruck von x bedeutet, nach diesem Modul zerfällbar sei, oder nicht.

Nach dem Modul p hat $(x-a)^n+pFx$ nur Factoren von der Form $(x-a)^m$, wo a und m ganze Zahlen bedeuten (§. 6.); es mufs daher, wenn $(x-a)^n+pFx$ nach dem Modul p^2 zerfällbar ist, jeder der Factoren die Form $(x-a)^m+pRx$ haben; wo Rx einen Ausdruck von x bedeutet. Es sei also $(x-a)^n+pFx \equiv [(x-a)^m+pRx][(x-a)^q+pQx] \pmod{p^2}$, wo Qx ebenfalls einen Ausdruck von x, und q eine ganze Zahl bedeutet. Setzt man nun $x=a$, so erhält man offenbar $pFa \equiv 0 \pmod{p^2}$ und daher $Fa \equiv 0 \pmod{p}$. Es mufs also Fx nach dem Modul p den Factor $x-a$ haben, und man darf daher den Satz aussprechen: ***dafs $(x-a)^n+pFx$ nach dem Modul p^2 irreductibel sein werde, wenn Fx nach dem Modul p nicht den Factor $x-a$ in sich schliefst.*** Übrigens folgt leicht, dafs die Erfüllung dieser Bedingung hinreicht, um $(x-a)^n+pFx$ nach dem Modul p^2 zerfällbar zu machen.

Wenden wir das erhaltene Resultat auf den Ausdruck $\frac{x^n-1}{x-1}$ an, wo n eine Primzahl bedeutet. Es ist für diesen Fall $x^n-1 \equiv (x-1)^n \pmod{n}$, und man erhält also

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 = (x-1)^{n-1}+nFx.$$

Für $x=1$ erhält man $n=nF(1)$ und daher $F(1)=1$, und nicht $\equiv 0 \pmod{n}$. ***Hieraus folgt, dafs $\frac{x^n-1}{x-1}$ nach dem Modul n^2 stets irreductibel ist, wenn n eine Primzahl bedeutet; mithin mufs dieser Ausdruck gewifs in algebraischer Beziehung irreductibel sein.***

Die Leichtigkeit des Beweises dieses Satzes ist auffallend, da derselbe in den „Disquisitiones" mit einem viel gröfsern Aufwande von Scharfsinn, und dennoch viel umständlicher geführt ist. (Vergl. §. 50. Zus. 2.)

Bedeutet nun fx einen Ausdruck, der nach dem Modul p irreductibel ist, so ist jetzt die Bedingung zu finden, unter welcher $(fx)^n+pFx$ nach

dem Modul p^2 irreductibel sei, oder nicht. Da $(fx)^n+pFx$ nach dem Modul p nur Factoren von der Form $(fx)^m$ haben kann, so mufs jeder Factor von $(fx)^n+pFx$ in Bezug auf den Modul p^2 die Form $(fx)^m+pRx$ haben. Setzt man also $(fx)^n+pFx \equiv [(fx)^m+pRx][(fx)^q+pQx] \pmod{p^2}$, und α eine Wurzel von fx, so erhält man $pF\alpha \equiv 0 \pmod{p^2, \alpha}$, und daher $F\alpha \equiv 0 \pmod{p, \alpha}$. ***Soll demnach*** $(fx)^n+pFx$ ***nach dem Modul*** p^2 ***zerfällbar sein, so mufs*** $F\alpha \equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ ***und folglich*** fx ***in Bezug auf den Modul*** p ***ein Factor von*** Fx ***sein*** *). Dafs diese Bedingung für die Zerfällbarkeit auch hinreiche, ist ebenfalls leicht zu sehen.

§. 62.

Lehrsatz. Ist fx ein einfacher irreductibler Ausdruck in Bezug auf den Modul p, und vom n^{ten} Grade, und $\varphi\alpha$ irgend ein Ausdruck einer Wurzel desselben, der nicht $\equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ ist: so ist stets $(\varphi\alpha)^{p^{m-1}(p^n-1)} \equiv 1 \pmod{p^m, \alpha}$; oder: Die $p^{m-1}(p^n-1)^{\text{te}}$ Potenz jedes Ausdrucks der Wurzel einer nach dem Modul p irreductibeln einfachen Congruenz ist nach dem Modul (p^m, α) congruent 1, wenn der Ausdruck selbst nicht $\equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ ist.

Beweis. Es ist $(\varphi\alpha)^{p^n-1} \equiv 1 \pmod{p, \alpha}$ (§. 19.). Schreibt man diese Congruenz als Gleichung, so erhält man $(\varphi\alpha)^{p^n-1} = 1+pR\alpha$, wo $R\alpha$ einen Ausdruck von α bedeutet. Erhebt man beide Seiten der Gleichung zur Potenz p^{m-1} und bedenkt, dafs $(1+pR\alpha)^{p^{m-1}} \equiv 1 \pmod{p^m, \alpha}$ ist (wie leicht aus der Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatze folgt), so erhält man $(\varphi\alpha)^{p^{m-1}(p^n-1)} \equiv 1 \pmod{p^m, \alpha}$.

Zusatz. Da $fx \equiv (x-\alpha)(x-\alpha^p)\ldots.(x-\alpha^{p^{n-1}}) \pmod{p, \alpha}$ ist (§. 18), so erhält man, wenn man diese Congruenz als Gleichung schreibt:

$$fx = (x-\alpha)(x-\alpha^p)\ldots.(x-\alpha^{p^{n-1}})+pF(x, \alpha),$$

wo $F(x, \alpha)$ einen Ausdruck von x bedeutet, dessen Coëfficienten Ausdrücke von α sind. Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung zur $(p^{m-1})^{\text{ten}}$ Potenz und schliefst wie vorher, so erhält man

$$(fx)^{p^{m-1}} \equiv \left[(x-\alpha)(x-\alpha^p)\ldots.(x-\alpha^{p^{n-1}}\right]^{p^{m-1}} \pmod{p^m, \alpha}.$$

Man kann diese Formel als die allgemeinere der ersten Formel in (§. 18.) an-

*) Setzt man nämlich $Fx = fx \cdot qx + rx$, wo qx den algebraischen Quotienten bedeutet, den man erhält, wenn man Fx durch fx dividirt, und rx den Divisions-Rest: so ist offenbar $F\alpha = r\alpha$. Da nun $F\alpha \equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ ist, so mufs auch $r\alpha \equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ sein. Dies kann aber nur geschehen, wenn rx ein $p$facher Ausdruck ist. In diesem Falle ist dann aber fx in Bezug auf den Modul p ein Theiler von Fx, wie oben vorausgesetzt wird.

sehen. Indessen wird die wahre Bedeutung jener Formel für den Modul (p^m, α) erst in Folgendem gezeigt werden.

§. 63.

Wenn fx ein einfacher und nach dem Modul p irreductibler Ausdruck ist, dessen Wurzeln $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{n-1}$ sind; ferner φx irgend einen andern Ausdruck von x bezeichnet, und $(z-\varphi\alpha)(z-\varphi\alpha_1)\ldots.(z-\varphi\alpha_{n-1})$, welches gleich Fz gesetzt werden mag, ebenfalls nach dem Modul p irreductibel ist, und man hat $D\varphi x = fx\cdot qx + p^m rx$, wo $D\varphi x$ einen Ausdruck von φx, qx und rx aber Ausdrücke von x bedeuten: so kann man auch $Dz = Fz\cdot Qz + p^m Rz$ setzen, wo Qz und Rz ebenfalls Ausdrücke von z bezeichnen. Oder, wenn $D\varphi\alpha \equiv 0 \pmod{p^m, \alpha}$ ist, so mufs auch $D\varphi\alpha \equiv 0 \pmod{p^m, \varphi\alpha}$ sein, wenn Fz oder $(z-\varphi\alpha)(z-\varphi\alpha_1)\ldots.(z-\varphi\alpha_{n-1})$ nach dem Modul p irreductibel ist.

Beweis. Man setze $Dz = Fz\,Q_1 z + R_1 z$, wo $Q_1 z$ den algebraischen Quotienten und $R_1 z$ den Rest bedeutet, welchen man erhält, wenn man Dz durch Fz dividirt. Da nun $D\varphi x = fx\cdot qx + p^m rx$ und daher $D\varphi\alpha = p^m r\alpha$, $D\varphi\alpha_1 = p^m r\alpha_1$, ... $D\varphi\alpha_{n-1} = p^m r\alpha_{n-1}$ ist, so folgt, dafs $N(D_F) = D\varphi\alpha\, D\varphi\alpha_1 \ldots. D\varphi\alpha_{n-1} = p^{n\cdot m} r\alpha\, r\alpha_1 \ldots. r\alpha_{n-1}$ sein werde. Es ist mithin offenbar $N(D_F) \equiv 0 \pmod{p}$, und daher Fz ein Theiler von Dz in Bezug auf den Modul p (§. 11.). Man kann folglich $R_1 z = pR_2 z$ setzen, wo $R_2 z$ einen Ausdruck von z bedeutet. Dann erhielte man aber $N(D_F) = N(pR_{2_F}) = p^n NR_{2_F} = p^{n\cdot m} r\alpha_1 r\alpha_2 \ldots. r\alpha_{n-1}$ und mithin

$$N(R_{2_F}) = p^{n(m-1)} r\alpha\, r\alpha_1 \ldots. r\alpha_{n-1}.$$

Ist nun $m > 1$, so mufs $N(R_{2_F})$ ebenfalls $\equiv 0 \pmod{p}$ und daher $R_2 z$ von der Form $pR_3 z$ sein, wo $R_3 z$ einen Ausdruck von z bedeutet. Hieraus folgt $R_1 z = p^2 R_3 z$ und $Dz = Fz\cdot Q_1 z + p^2 R_3 z$. Setzt man diese Schlüsse fort, so erhält man $Dz = Fz\cdot Q_1 z + p^{m-1} R_m z$. Dann erhielte man aber $N(R_{1_F}) = N(p^{m-1} R_{m_F}) = p^{n(m-1)} N(R_{m_F}) = p^{n\cdot m} r\alpha_1 r\alpha_2 \ldots. r\alpha_{n-1}$ und mithin

$$NR_{m_F} = p^n r\alpha\, r\alpha_1 r\alpha_2 \ldots. r\alpha_{n-1}.$$

Hiernach wäre schliefslich $N(R_{m_F}) \equiv 0 \pmod{p}$ und $R_m z = pR_{m+1} z$, und daher $Dz = Fz\,Q_1 z + p^m R_{m+1} z$. Setzt man nun $Qz = Q_1 z$ und $Rz = R_{m+1} z$, so ist der Satz bewiesen.

§. 64.

Lehrsatz. Ist fx ein einfacher Ausdruck vom Grade n, und in Bezug auf den Modul p irreductibel: ist ferner Fz ebenfalls ein einfacher Ausdruck

von z, dessen Wurzeln die $(p^{m-1})^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln von fx sind: so ist stets:

$$Fz \equiv (z-\beta)(z-\beta^p)(z-\beta^{p^2}) \ldots (z-\beta^{p^{n-1}}) \pmod{p^m, \beta};$$

wenn β eine Wurzel von Fz ist.

Beweis. Da $fx \equiv Fx \pmod{p}$ sein mufs (§. 13.), so folgt, dafs auch Fx, und somit auch Fz zugleich mit fx nach dem Modul p irreductibel sein mufs. Ist nun α eine Wurzel von fx, so erhält man $\alpha^{p^{m-1}(p^n-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^m, \alpha}$ (§. 58.). Hieraus folgt, dafs fx in Bezug auf den Modul p^m ein Factor von $x^{p^{m-1}(p^n-1)} - 1$ ist (§. 52.). Setzt man nun $x^{p^{m-1}} = z$, so erhält man $x^{p^{m-1}(p^n-1)} - 1 = z^{p^n-1} - 1$. Beide Ausdrücke treten an die Stelle von $D\varphi x$ und Dz im vorigen Paragraphen. Da man nun $x^{p^{m-1}(p^n-1)} - 1 = fx \cdot qx + p^m rx$ setzen kann, so folgt auch, dafs $z^{p^n-1} - 1 = Fz \cdot Qz + p^m Rz$, oder dafs Fz in Bezug auf den Modul p^m ein Divisor von $z^{p^n-1} - 1$ sei. Aber das Product sämmtlicher, nach dem Modul p verschiedenen irreductiblen Ausdrücke von z, deren Grad in n aufgeht, ist $\equiv z^{p^n-1} \pmod{p}$ (§. 45.): also können Fz und Qz in Bezug auf den Modul p keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Setzt man in die letzte Gleichung statt z den Werth β und bedenkt, dafs $F\beta = 0$ ist, so erhält man $\beta^{p^n-1} - 1 = p^m R\beta$ oder $\beta^{p^n-1} \equiv 1 \pmod{p^m, \beta}$, und hieraus $(\beta^p)^{(p^n-1)} \equiv 1 \pmod{p^m, \beta}$ oder $(\beta^p)^{(p^n-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$. Setzt man aber in dieselbe Gleichung statt z den Werth β^p, so erhält man $(\beta^p)^{(p^n-1)} - 1 = F\beta^p \, Q\beta^p + p^m R\beta^p$, und mithin, da $(\beta^p)^{(p^n-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$ ist, $F\beta^p \, Q\beta^p \equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$. Da indessen der Ausdruck, dessen Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln von Fz sind, mit Fz nach dem Modul p congruent ist, und Qz mit Fz keinen gemeinschaftlichen Factor nach dem Modul p hat, so kann Qp^p nicht $\equiv 0 \pmod{p, \beta}$ sein: es mufs mithin $Fp^p \equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$ sein (§. 57.). Ebenso läfst sich beweisen, dafs jeder der Ausdrücke $F\beta^{p^2}$, $F\beta^{p^3}$, ... $\equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$ sei. Hiermit ist die Grundlage des Beweises gewonnen, und derselbe kann nun ganz ähnlich wie im §. 18. zu Ende geführt werden.

Zusatz 1. Man kann auch behaupten, dafs der einfache Ausdruck, dessen Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln von Fz sind, mit Fz nach dem Modul p^m congruent sein müsse. Man nenne nämlich diesen Ausdruck Gz und setze $Gz = Fz + Rz$, wo Rz den Divisions-Rest bedeutet, den man erhält, wenn man Gz durch Fz dividirt. Setzt man nun statt z den Werth β^p und bedenkt, dafs $G\beta^p = 0$ ist, so erhält man $F\beta^p + R\beta^p = 0$.

Und da nun $F\beta^p \equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$ ist, so mufs auch $R\beta^p \equiv 0 \pmod{p^m, \beta}$ sein, und folglich Rx die Form $p^m R_1 z$ haben (§. 56.), wo $R_1 z$ einen Ausdruck von z bedeutet. Man erhält daher $Gz = Fz + p^m R_1 z$ oder $Gz \equiv Fz \pmod{p^m}$.

Zusatz 2. Es ist in (§. 59.) gezeigt worden, dafs es $p^{(m-1)n}$ einfache Ausdrücke giebt, die mit fx nach dem Modul p congruent, die aber nach dem Modul p^m verschieden sind. Entwickelt man nun einen einfachen Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^{m-1})^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln irgend eines dieser Ausdrücke sind, so wird man nach dem Modul p^m stets denselben Ausdruck erhalten. Bezeichnet man nämlich wie oben einen solchen Ausdruck durch Fx, so erhält man $x^{p^n-1} - 1 = Fx\,Qx + p^m Rx$ (vergl. diesen §.), oder man hat $x^{p^n-1} - 1 \equiv Fx\,Qx \pmod{p^m}$ und weifs zugleich, dafs $Fx \equiv fx \pmod{p}$ ist. Da aber nun Fx und Qx keinen gemeinschaftlichen Theiler nach dem Modul p haben können (§. 45.), so kann es nicht noch ein Paar Factoren $F_1 x$ und $Q_1 x$ der Art geben, dafs $x^{p^n-1} - 1 \equiv F_1 x\,Q_1 x \pmod{p^m}$, und $F_1 x \equiv fx \pmod{p}$ sei (§. 59.). Dies müfste aber der Fall sein, wenn zwei Ausdrücke, die nach dem Modul p congruent, nach dem Modul p^m aber verschieden sind, nach dem Modul p^m zwei verschiedene Ausdrücke erzeugten, indem man diejenigen Ausdrücke entwickelte, die von ihren Wurzeln die $(p^m)^{\text{ten}}$ Potenzen enthielten.

Von den zusammengesetzten Moduln.

§. 65.

Ist der Modul von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc., wo a, b, c etc. verschiedene Primzahlen und α, β, γ etc. natürlich ganze positive Exponenten bedeuten, so leitet man leicht folgenden Satz ab: Wenn mx und Mx Ausdrücke von x bedeuten, die nach den einzelnen Moduln a^α, b^β, c^γ etc. congruent sind, so sind diese beiden Ausdrücke auch nach dem Modul $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc. congruent. Bezeichnet man nämlich zwei entsprechende Coëfficienten von Mx und mx durch A und a, so erhält man $A - a \equiv 0 \pmod{a^\alpha}$, $A - a \equiv 0 \pmod{b^\beta}$, $A - a \equiv 0 \pmod{c^\gamma}$ etc. und daher $A - a \equiv 0 \pmod{a^\alpha b^\beta c^\gamma \text{ etc.}}$ oder $A \equiv a \pmod{a^\alpha b^\beta c^\gamma \text{ etc.}}$. Da also alle entsprechenden Coëfficienten von Mx und mx nach dem Modul $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc. übereinstimmen, so sind sie selbst nach diesem Modul congruent.

Zusatz. Aus dem vorherstehenden Satze ergiebt sich unmittelbar folgender: Läfst sich ein Ausdruck von x durch einen zweiten, in Bezug auf die einzelnen Moduln a^α, b^β, c^γ etc. ohne Rest theilen, so läfst er sich auch in Bezug auf den Modul $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc. durch diesen Ausdruck ohne Rest theilen.

§. 66.

Lehrsatz. Ist Fx ein einfacher Ausdruck, so kann man die Zahlen z und z_1 stets so bestimmen, dafs $(x^z-1)^{z_1}$ durch Fx in Bezug auf den Modul $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc. sich theilen lasse.

Beweis. Zunächst bemerke man, dafs, wenn ein Ausdruck fx in Bezug auf den Modul a^α irreductibel ist, so ist er entweder in Bezug auf a selbst irreductibel, oder die Potenz eines irreductibeln Ausdrucks (§. 60.). Für den ersten Fall folgt aus (§. 62.), dafs fx ein Divisor von $x^{a^{\alpha-1}(a^n-1)}-1$ sei, wo n den Grad von fx angiebt. Für den zweiten Fall setze man $n=n_1 z$, wo n_1 und z ganze Zahlen bedeuten, und $fx=\varphi x^{n_1}+p\psi x$, wo φx ein einfacher irreductibler Ausdruck vom Grade z in Bezug auf den Modul p ist: so ist φx in Bezug auf den Modul a ein Theiler von $x^{a^{z_1}-1}-1$ (§. 18.); woraus folgt, dafs $(x^{a^{z_1}-1}-1)^{n_1}$ in Bezug auf den Modul a den Factor φx^{n_1} habe, und dafs man ferner in Bezug auf denselben Modul auch fx oder $\varphi x^{n_1}+p\psi x$ als Factor von $(x^{a^{z_1}-1}-1)^{n_1}$ ansehen könne. Da nun $(x^{a^{z_1}-1}-1)^{n_1}$ in Bezug auf den Modul a den Factor fx in sich schliefst, so mufs $(x^{a^{z_1}-1}-1)^{n_1 a^{\alpha-1}}$ in Bezug auf den Modul a^α den Factor fx in sich schliefsen. Hieraus folgt nun zunächst, dafs man, wenn fx in Bezug auf den Modul a^α irreductibel ist, stets die Zahlen t und t_1 so bestimmen könne, dafs fx in Bezug auf den Modul a^α ein Factor von $(x^t-1)^{t_1}$ werde. Enthält nun Fx in Bezug auf den Modul a^α die einfachen irreductibeln Factoren fx, f_1x, f_2x etc., so bestimme man t_2 und t_3 so, dafs $(x^{t_2}-1)^{t_3}$ in Bezug auf den Modul a^α den Factor f_1x habe, und t_4 und t_5 so, dafs $(x^{t_4}-1)^{t_5}$ in Bezug auf denselben Modul den Factor f_2x habe etc. Nennt man dann T das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von t, t_0, t_2 etc., und T_1 die Summe von $t_1+t_3+t_5+$ etc., so folgt leicht, dafs $(x^T-1)^{T_1}$ den Factor Fx in Bezug auf den Modul a^α in sich schliefsen werde. Bildet man nun noch die Ausdrücke $(x^S-1)^{S_1}$, $(x^V-1)^{V_1}$ etc., welche in Bezug auf die Moduln b^β, c^γ etc. Fx als Factor enthalten, so folgt zunächst, dafs $(x^T-1)^{T_1}(x^S-1)^{S_1}(x^V-1)^{V_1}\ldots$ in Bezug auf den Modul $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc. den Factor Fx enthalte (§. 65.). Es erhellet aber auch leicht, dafs, wenn z das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von T, S, V etc., und z_1 die Summe von T_1, S_1, V_1 etc. ist, dafs alsdann $(x^z-1)^{z_1}$ in Bezug auf den Modul $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ den Factor Fx in sich schliefsen werde. (§. 65.)

Brandenburg, den 3ten April 1846.

12.

Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facilis evolutio.

(Auct. *Aug. Ferd. Möbius*, Prof. ord. Lipsiae.)

Cuivis astronomicorum calculorum perito notum est, duas esse methodos, quibus mutuae corporum coelestium perturbationes in computum vocentur. Una, quae *methodus perturbationum absolutarum* vocatur, formulas proponit, quibus corporis perturbati coordinatae polares, i. e. longitudo, latitudo et radius vector, tempore et quantitatibus constantibus exprimuntur, ita ut ad locum corporis pro dato tempore inveniendum sola substitutio hujus specialis valoris temporis in formulis istis generalibus requiratur. Verum enim vero quum ejusmodi formulas tunc tantum ea, quae sufficit, acie evolvere liceat, si excentricitas et inclinatio orbitae corporis perturbati parvae sunt, quod solummodo in planetis majoribus eorumque satellitibus accidit: pro planetis quatuor minoribus et pro cometis alia sub nomine *methodi perturbationum specialium* cognita adhiberi solet methodus, — quamquam horum quoque corporum perturbationes priori methodo subjicere vir ill. *Hansen* nostris temporibus feliciter conatus est *).

Methodus haec altera in consideratione nititur, corpus perturbatum circa corpus primarium, puta planetam circa solem, si vis perturbatrix subito cesset, secundum *Kepleri* leges motu elliptico progressurum esse ultima prioris orbitae particula perfecte determinando; quum autem illius vis impulsus continuo iterentur, elementa motus elliptici, quem corpus quovis temporis momento sequi studeat, continuo mutari. Hinc altera methodus eo tendit, ut ex elementis ellipticis, quae temporis quodam momento locum habuerunt, elliptica alius momenti elementa derivet, quippe ex quibus locus corporis ad hoc posterius tempus pertinens secundum regulas, quae elliptico motui competunt, notissimas calculari possit. Jam si haec duo temporis momenta perparum inter se distarent, evolutione tantum formularum differentialium opus esset, quibus variationes elementorum motus elliptici, singulo, ut ita dicam, vis perturbatricis impulsu productae, exprimuntur.

*) *Hansen*, Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. Gotha 1843.

Quum vero istud temporis intervallum haud raro annos, imo longam interdum annorum seriem complectatur, formulae illae differentiales a priori momento usque ad posterius integrandae sunt. Haec autem integratio ob nimiam formularum complicationem directe institui nequit et idcirco ope quadraturae, quam vocant, mechanicae absolvenda est.

Utriusque harum methodorum prima fundamenta geometra summus ***Eulerus*** posuit; et formulas quidem differentiales, quibus elementorum variationes secundum methodum posteriorem calculantur, in dissertatione enucleavit, quae tomo XII. Nov. Comment. Petrop. anni 1768, inserta est: ***Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi.*** Eaedem formulae, licet sub forma paulum mutata, exhinc diversimodo ab aliis evolutae sunt, ut a ***Lagrangio,*** a ***Laplacio,*** a ***Besselio;*** ultimo denique tempore ab ***Enckio*** in ***Ephemeridibus Berolinensibus*** anni 1837, et quidem ea sub forma, sub qua ***Gaussio*** quondam cum eo hae formulae communicatae fuerant. Jam si, oblata mihi nunc scribendi occasione, earundem formularum explicationem rursus in medium protuli, id propterea a me factum est, quod in elaborando libro anno praeterlapso a me edito ***(Die Elemente der Mechanik des Himmels etc.)*** in modum incidi, quo ad istas formulas, ut mihi saltem videtur, simplicius et facilius, quam, quas alii secuti sunt, rationibus pervenire licet.

His formulis evolutis, epilogi instar in variationem inquisivi, cui locus centri ellipseos perturbatae subjectus est. Quum enim, ut in fine istius libri ostendi, ex variatione centri variationes elementorum motus facillime derivari possint, et in orbitis paulum excentricis inter directionem vis perturbantis et directionem, secundum quam centram progreditur, memorabilis nexus intercedat, operae mihi pretium visum est, variationem centri, quam l. c. geometriae tantum elementaris ope et ratione approximativa exploravi, nunc formularum analyticarum adjumento accuratius determinare. Sed rem ipsam aggrediar eamque ita exponam, ut etiam ab iis, qui in calculis physico-astronomicis minus versati sunt, facile intelligi queat.

1. Vocentur S et P loca solis et planetae, quem initio a perturbationibus liberum ideoque in ellipsi progredientem statuimus, cuius unum focum sol occupat; focus alter designetur per F. Ponendo igitur ellipseos semiaxem majorem $= a$, excentricitatem $= e$, longitudinem perihelii in orbitae plano numeratam $= \omega$ et dehinc longitudinem puncti F, $= \omega + 180^0$, longitudinem planetae in orbita veram $= l$ et radium vectorem planetae $= r$, erunt in trian-

gulo SFP latera $SF = 2ae$, $SP = r$, $FP = 2a - r$ secundum notissimam ellipseos proprietatem, et angulos $PSF = \omega + 180^0 - l$; ergo

$$(2a-r)^2 = 4aaee + rr - 4aer\cos(\omega + 180^0 - l),$$

quae aequatio facile contrahitur in

$$(1.) \quad a(1-ee) = r + er\cos(l-\omega), \text{ sive ponendo}$$

$$(2.) \quad a(1-ee) = p,$$

quae linea p tertia proportionalis ad semiaxem majorem et minorem est et semiparameter ellipseos vocatur:

$$(1^*.) \quad \frac{p}{r} = 1 + e\cos(l-\omega).$$

Ponatur adhuc brevitatis gratia

$$(3.) \quad e\cos(\omega + 180^0 - l) = -e\cos(l-\omega) = x,$$

$$(4.) \quad e\sin(\omega + 180^0 - l) = +e\sin(l-\omega) = y,$$

ita ut ax et ay projectiones sint lineae ae a sole usque ad centrum ellipseos ductae, una in radium vectorem, altera in lineam radio normalem. Dehinc formula (1*.), quae aequationem ellipseos polarem sistit, mutatur in

$$(1^{**}.) \quad \frac{p}{r} = 1 - x.$$

2. Relatione inter coordinatas planetae polares r et l eruta, quotientes differentiales $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dl}{dt}$ sive celeritates indagemus, quibus coordinatae istae temporis t decursu variantur. Ac primum quidem relatio inter has celeritates, quae r, et l, appellentur, protinus fluit ex differentiatione formulae (1*.):

$$(5.) \quad \frac{pr,}{rr} = e\sin(l-\omega)\cdot l, = yl,.$$

Ut autem celeritatum unamquamque seorsim noscamus, secunda lex *Kepleri* adhuc in usum vocanda est, quae areas a radio vectore descriptas tempori proportionales esse enunciat. Constat nimirum ex elementis geometriae, sectorem a radio per tempusculum dt descriptum esse $= \frac{1}{2}rrdl$. Denotando igitur rationem peripheriae ad diametrum per π et motum planetae medium per n, quibus area ellipseos fit $= \pi a\sqrt{(ap)}$, et tempus revolutionis planetae $= \frac{2\pi}{n}$: lex illa *Kepleri* ad hanc nos proportionem ducit:

$$\tfrac{1}{2}rrdl : \pi a\sqrt{(ap)} = dt : \frac{2\pi}{n}, \text{ ex qua}$$

$rrl, = na\sqrt{(ap)}$ sequitur, et si praeterea

$$(6.) \quad nna^3 = \mu \text{ ponimus:}$$

$$(7.) \quad l, = \frac{\sqrt{(\mu p)}}{rr},$$

et hoc valore ipsius l, in (5.) substituto:

$$(8.) \quad r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot y.$$

Caeterum ex physices coelestis elementis notum est, esse

$$(9.) \quad nna^3 = K(M+m),$$

ubi M et m massas solis et planetae et K vim acceleratricem significant, qua a corpore, cujus massa $= 1$, aliud corpus in distantia $= 1$ ab illo dissitum attrahitur.

3. Ut ex formulis hucusque evolutis, si elementa motus a, n, e, ω, et una coordinatarum r et l data sunt, coordinata altera et celeritas r, et l, computari possunt, ita vicissim earundem formularum ope elementa motus determinare licet, si temporis quodam momento coordinatarum utraque et earum celeritates datae sunt et quantitas μ cognita supponitur. Tunc enim invenitur p ex (7.), x ex (1**.), y ex (5.) vel (8.), e et ω ex (3.) et (4.) conjunctim, a ex (2.) et n ex (6.).

Inprimis notatu digna est formula, qua elementum a per r, r, et l, exhibetur. Prodit enim ex formulis (2. 3. 4. et 1**.):

$$\frac{p}{a} = 1 - ee = 1 - xx - yy = 1 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 - yy,$$

et divisione per p facta:

$$(10.) \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{p}{rr} - \frac{yy}{p},$$

et formulis (7. et 8.) in usum vocatis:

$$(11.) \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{rrl_{,}^2 + r_{,}^2}{\mu};$$

ex quo theorema illud memorabile sequitur: ***Ad determinandum semiaxem majorem sive distantiam planetae a sole mediam sufficere radium vectorem et quantitatem celeritatis, qua planeta in orbita progreditur, neutiquam vero hujus celeritatis etiam directionem requiri.*** Planetae enim celeritatem si in duas alias resolvimus, quarum una directionem radii habet, altera huic directioni normalis est, manifesto habemus celeritates $r_{,}$ et $rl_{,}$; quapropter celeritas planetae ipsa est $= \sqrt{(r_{,}^2 + rrl_{,}^2)}$, a qua et ab r elementum a pendere formula (11.) nos docet.

Caeterum quoniam vi acceleratrice, cujus directio in orbitam corporis normalis est, quantitas celeritatis corporis non mutatur, ex theoremate modo allato adhuc concludere licet: ***Axem majorem ellipseos, qua planeta perturbatus ingreditur, quantitatem immutatam servaturum esse, si vis perturbans orbitae planetae semper normalis insistat.***

4. Supponamus jam, planetam temporis momento, quo locum per coordinatas r et l datum occupat et celeritate quoad quantitatem et directionem per $r,$ et $l,$ plane definita incedit, ictu infinite parvo alicunde oriundo secundum directionem in plano orbitae contentam feriri, quo celeritates $r,$ et $l,$ incrementa infinite parva $dr,$ et $dl,$ capiant. Hinc planeta, qui ante istud momentum in ellipsi movebatur, cujus elementa ex $r,$ $l,$ $r,$ et $l,$ ratione modo exposita computari possunt, post ictum in ellipsi paululum ab illa diversa procedere incipiet, quippe cujus elementa ex quantitatibus $r,$ $l,$ $r,+dr,$ et $l,+dl,$ ad idem momentum spectantibus calculanda sunt. Variationes igitur, quas elementa motus ob ictum subeunt, inveniemus, si formulas, quae inter elementa et $r,$ $l,$ $r,,$ $l,$ locum tenent, secundum elementa et celeritates $r,,$ $l,$ differentiamus, coordinatas $r,$ l vero et quantitatem $\mu,$ quae natura sua constans est, immutatas linquimus. Efficitur hoc modo ex (7. 1**. 8. et 11.):

$$(12.) \quad \sqrt{\frac{\mu}{p}}dp = 2rrdl,,$$

$$dx = -\frac{dp}{r}, \quad dr, = \sqrt{\frac{\mu}{p}}dy - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\cdot ydp,$$

$$\frac{\mu da}{aa} = 2rrl,dl,+2r,dr,;$$

et si in his formulis pro $dp,$ $l,$ et $r,$ valores ex (12. 7. et 8.) substituuntur:

$$(13.) \quad \sqrt{\frac{\mu}{p}}dx = -2rdl,,$$

$$(14.) \quad \sqrt{\frac{\mu}{p}}dy = dr+\frac{rry}{r}dl,,$$

$$(15.) \quad \sqrt{\frac{\mu}{p}}da = 2\frac{aa}{p}ydr,+2aadl,.$$

Inventis dx et $dy,$ sine mora variationes elementorum e et ω exhiberi possunt. Est enim secundum (3. et 4.) $ee = xx+yy,$ $\text{tang}(l-\omega) = -y:x,$ et dehinc, differentiando:

$$(16) \quad ede = xdx+ydy, \quad \frac{d\omega}{\cos(l-\omega^2)} = \frac{xdy-ydx}{xx}, \text{ sive}$$

$$(17.) \quad eed\omega = xdy-ydx.$$

5. Investigemus nunc effectum ictus, qui planetae celeritatem infinite parvam plano orbitae normalem tribuit, quae dw vocetur et positiva accipiatur, si sursum, i. e. versus boream, directa est. Combinatione hujus celeritatis cum celeritate $rl,$, quae in plano orbitae radio vectori normaliter insistit, nova oritur $= rl,$, quae itidem radio normalis est et cum priori $rl,$ angulum facit $= \frac{dw}{rl,}$

brevitatis causa per $d\sigma$ designandum. Ejusmodi igitur ictu planum orbitae circa radium vectorem tanquam axem per angulum eundem $d\sigma$ volvitur, dum celeritates rl, et r, et dehinc etiam motus in plano omnino non mutantur.

Notissima est ratio, qua situs plani orbitae versus planum aliquod fundamentale, puta versus planum ecliptices, ***inclinatione*** et ***longitudine nodi ascendentis*** determinatur. Videamus igitur, quantum haec duo elementa, quae ι et ϑ dicam, rotatione orbitae per angulum $d\sigma$ varientur. Projiciantur in hunc finem planeta et nodi ascendentis ante et post ictum loca in sphaeram coelestem ex sole, utpote centro, in P, N et N', et ducantur tres circuli maximi NN', NP et $N'P$, qui erunt ii, in quibus sphaera plano fundamentali, plano orbitae ante ictum et eodem postea secatur. Hinc anguli, quos circuli NP et $N'P$ cum circulo NN' faciunt, erunt $= \iota$ et $\iota + d\iota$, angulus $NPN' = d\sigma$; denique si punctum circuli fundamentalis NN', a quo in hoc circulo longitudines numerantur, vocaveris A, erunt arcus $AN = \vartheta$, $AN' = \vartheta + d\vartheta$, ergo $NN' = d\vartheta$; arcus fractus $AN + NP = l$, ideoque $NP = l - \vartheta$.

In triangulo sphaerico $NN'P$ sunt igitur latera $NN' = d\vartheta$, $NP = \lambda - \vartheta$, anguli iis oppositi $= d\sigma$, $180^0 - \iota - d\iota$, et tertius angulus $= \iota$; ergo

$$\cos(\iota + d\iota) = \cos(d\sigma)\cos\iota - \sin(d\sigma)\sin\iota\cos(\lambda - \vartheta)$$

et

$$\sin(\iota + d\iota) : \sin(d\sigma) = \sin(\lambda - \vartheta) : \sin(d\vartheta);$$

unde sequitur neglectis, ut par est, prima altioribus potestatibus differentialium $d\iota$ et $d\vartheta$:

$$(18.) \qquad d\iota = \cos(\lambda - \vartheta)\, d\sigma \quad \text{et} \quad d\vartheta = \frac{\sin(\lambda - \vartheta)}{\sin\iota}\, d\sigma.$$

Atque his formulis variationes, quas elementa ι et ϑ ob rotationem orbitae per angulum $d\sigma$ sive propter ictum in orbita normalem experiuntur, determinatae sunt.

Probe vero adhuc notandum est, variatione situs orbitae variari etiam longitudinem l. Haec enim, quum per arcum fractum $AN + NP$ repraesentetur, progrediente nodo ex N in N' mutatur in $AN' + N'P$ et idcirco incrementum capit $dl = AN' - AN - (NP - N'P)$, vel si ex N' in NP perpendiculum $N'R$ demittitur: $dl = NN' - NR$. Est autem $NR = NN' \cos N'NP = \vartheta \cdot \cos\iota$; ergo

$$dl = (1 - \cos\iota)\, d\vartheta.$$

Denique per se patet, eodem incremento longitudinem non solum planetae, sed etiam cujusvis alius puncti in orbitae plano, ergo etiam longitudinem ω perihelii, augendam esse.

6. Postquam ostensum est, quantum elementa motus elliptici variantur, si temporis quopiam momento celeritas planetae causa aliqua externa, quam ictum appellavimus, infinite parum variatur, facile est videre, quomodo effectus, quem vis aliqua planetam continuo perturbans producit, explorari possit. Ejusmodi enim vis eodem modo, ut quaelibet alia vis acceleratrix, in eo se exserere censenda est, ut initio cujusvis elementi temporis celeritas planetae secundum quamlibet directionem aestimata incrementum capiat, quod vi secundum eandem directionem aestimatae et per temporis elementum multiplicatae aequale est.

Statuamus, ut antea, locum, quem planeta temporis quodam momento occupat, per r et l, et celeritatem, quam hoc momento adeptus est, per $r_,$ et $l_,$ definiri. Jam si vis, quae eodem momento planetam perturbat, secundum radium vectorem, secundum directionem, quae in plano per radium et directionem celeritatis ducendo ipsi radio normalis est, et secundum directionem eidem plano normalem in tres vires resolvitur per $\boldsymbol{P, Q, R}$ nuncupandas: celeritates, quae ex resolutione celeritatis planetae secundum easdem directiones oriuntur, et quae sunt $= r_,$, $rl_,$ et 0, incrementa $\boldsymbol{Pdt}$, $\boldsymbol{Qdt}$ et $\boldsymbol{Rdt}$ accipient, ideoque mutabuntur in $r_, + \boldsymbol{Pdt}$, $rl_, + \boldsymbol{Qdt}$ et $\boldsymbol{Rdt}$; dummodo adhuc vires $\boldsymbol{P, Q, R}$ positivae vel negativae iisdem sub conditionibus numerentur, sub quibus celeritates $r_,$, $rl_,$ et dw (artcl. 5.) vel positivas vel negativas aestimavimus. Planeta igitur, qui per elementum dt, quod momento memorato proxime praecedebat, in ellipsi movebatur ope quantitatum $r, l, r_,$ et $l_,$ determinanda, per elementum dt proxime sequens in ellipsi incedet, cujus elementa ex $r, l, r_, + \boldsymbol{Pdt}$, $l_, + \frac{Q}{r} dt$ prodeunt, et cujus planum a plano prioris ellipseos in radio vectore sub angulo $d\sigma = \frac{dw}{rl_,} = \frac{\boldsymbol{Rdt}}{rl_,}$ secatur. Hinc prioris ellipseos elementis et quantitatibus auxiliaribus ab iis pendentibus per $p, x, y, a, e, \omega, \iota, \vartheta$, posterioris per $p + dp$, $x + dx$, ... expressis, incrementa $dp, dx, \ldots$ reperientur, si in formulis (12. 13. ... 17.) $\boldsymbol{Pdt}$ et $\frac{Q}{r} dt$ pro $dr_,$ et $dl_,$, et in (18.) $\frac{R}{rl'} dt$, $= \frac{r\boldsymbol{R}}{\sqrt{(\mu p)}} dt$, pro $d\sigma$ substituuntur. Quo facto, et si praeterea brevitatis gratia

$$(19.) \quad \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1, \quad \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1, \quad \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1$$

positum fuerit, efficietur

$$dp = 2r\boldsymbol{Q}_1 dt, \quad dx = -2\boldsymbol{Q}_1 dt, \quad dy = \boldsymbol{P}_1 dt + \frac{ry}{p} \boldsymbol{Q}_1 dt,$$

$$(20) \quad da = 2\frac{aa}{p} y \boldsymbol{P}_1 dt + \frac{2aa}{r} \boldsymbol{Q}_1 dt,$$

$$(21.)\qquad ede = xdx + ydy = yP_1dt + \left(\frac{ryy}{p} - 2x\right)Q_1dt,$$

$$(22.)\qquad eed\omega = xdy - ydx = xP_1dt + \left(\frac{rx}{p} + 2\right)yQ_1dt.$$

Ex (10. et 1**.) autem fluit

$$\frac{ryy}{p} - 2x = 2 - \frac{p}{r} - 2x - \frac{r}{a} = \frac{p}{r} - \frac{r}{a}, \qquad \frac{rx}{p} + 2 = \frac{r}{p} + 1.$$

Harum transformationum ope, et si anomaliam veram $l - \omega = v$ ponimus, unde $x = -e\cos v$ et $y = e\sin v$ sequitur, prodit:

$$\text{I.}\qquad da = 2\frac{aae}{p}\sin v \cdot P_1dt + 2\frac{aa}{r}Q_1dt,$$

$$\text{II.}\qquad de = \sin v \cdot P_1dt + \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right)Q_1dt,$$

$$\text{III.}\qquad d\omega = -\frac{1}{e}\cos v \cdot P_1dt + \frac{p+r}{pe}\sin v \cdot Q_1dt + (1 - \cos\iota)\,d\vartheta,$$

(confer articl. 5.). Denique formulae (18.) nobis suppeditant:

$$\text{IV.}\qquad d\iota = \frac{r}{p}\cdot\cos(\lambda - \vartheta)\cdot R_1dt,$$

$$\text{V.}\qquad d\vartheta = \frac{r}{p}\cdot\frac{\sin(\lambda - \vartheta)}{\sin\iota}\cdot R_1dt.$$

7. Pauca de computatione virium perturbantium P, Q, R, quae in his formulis occurrunt, addenda sunt. Quae vires, quum, aeque ac vis perturbans integra, massae planetae perturbantis proportionales sint, caeteroquin a mutuo situ solis, planetae perturbati et perturbantis dependeant, necessario productis $Km'P_0$, $Km'Q_0$, $Km'R_0$ aequiparari poterunt, in quibus m' istam massam, K, ut supra, vim attractivam unitatis massae in corpus unitate lineari ab ea distans, et P_0, Q_0, R_0 quantitates exprimunt, quae solummodo a coordinatis planetarum perturbati et perturbantis pendent. Has functiones pro datis assumentes *) habebimus

$$P_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot P = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot Km'P_0,$$

---

*) Ponendo planetae perturbantis radium vectorem $= r'$, ejusdem longitudinem in orbita perturbati numeratam $= l'$, latitudinem ad eandem orbitam relatam $= b'$ et

$$\sqrt{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos b'\cos(l - l')]} = \varrho,$$

quae est distantia duorum planetarum a se invicem, tunc erit:

$$P_0 = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)r'\cos b'\cos(l - l') - \frac{r}{\varrho^3},$$

$$Q_0 = -\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)r'\cos b'\sin(l - l'),$$

$$R_0 = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)r'\sin b'.$$

sive, quum ex (6. et 9.) sequatur $\frac{K}{\sqrt{\mu}} = \frac{na\sqrt{a}}{M+m}$:

$$P_1 = \frac{m'}{M+m} na\sqrt{(ap)} \cdot P_0 \text{ et eodem modo}$$

$$Q_1 = \frac{m'}{M+m} na\sqrt{(ap)} \cdot Q_0, \qquad R_1 = \frac{m'}{M+m} na\sqrt{(ap)} \cdot R_0.$$

8. Unius adhuc elementi determinanda restat variatio, longitudinis puta mediae in epocha, vel si mavis temporis, quo planeta perihelium transit. In hunc finem formulae prius evolvendae sunt, quibus pro dato temporis momento locus planetae ellipticus inveniri potest. Hoc vero facillime succedat inquirendo relationem inter r et $r_, = \frac{dr}{dl}$ exsistentem, quippe quae, si integrata fuerit, relationem inter r et l quaesitam suppeditabit.

Relatio, quae inter r et r' locum habet, illico combinatione formularum (8. et 10.) reperitur

$$\frac{r_,^2}{\mu} = \frac{2}{r} - \frac{p}{rr} - \frac{1}{a},$$

et si pro μ et p valores ex (6. et 2.) substituuntur:

$$(23.) \qquad \frac{rrr_,^2}{nnaa} = 2ar - aa(1-ee) - rr = aaee - (a-r)^2.$$

Loco ipsius r aliam nunc introducamus variabilem E ita, ut sit:

$$(24.) \qquad a - r = ae\cos E, \text{ ergo}$$

$$(25.) \qquad aaee - (a-r)^2 = aaee\sin E^2 \quad \text{et} \quad r_, = \frac{dr}{dt} = ae\sin E\frac{dE}{dt}.$$

Hac ratione formula (23.) mutatur in

$$\frac{rr}{nnaa}\frac{dE^2}{dt^2} = 1, \quad \text{sive} \quad ndt = \frac{r}{a}dE = (1 - e\cos E)\,dE \text{ (24.)},$$

ex qua, peracta integratione, sequitur:

$$n(t-t_0) = E - e\sin E,$$

t_0 denotante valorem temporis t, quo $E = 0$, ergo $r = a(1-e)$ et $l = \omega$, uti ex (24. et 1.) colligere licet; itaque t_0 significat tempus, quo planeta perihelium permeat, et $n(t-t_0)$ est motus medius planetae inde a transitu per perihelium usque ad finem temporis t. Vocatur hic motus *anomalia media*, quae cum longitudine perihelii in summam collecta dat *longitudinem* planetae sic dictam *mediam*. Quamobrem designando planetae tempore t anomaliam mediam et longitudinem mediam per M et λ, et longitudinem mediam tempore epochae, i. e. pro $t = 0$, per ε, erit

$$(26.) \qquad \omega + M = \omega + n(t-t_0) = \lambda, \quad \omega - nt_0 = \varepsilon, \text{ ergo}$$

$$(27.) \qquad \lambda = \varepsilon + nt, \text{ et}$$

$$(28.) \qquad M = E - e\sin E = \varepsilon + nt - \omega.$$

Secundum hanc formulam, si elementa n, e, ε et ω nota fuerint, pro quovis tempore t angulum E, qui ***anomalia excentrica*** dicitur, computare valebimus. Inventa autem hac anomalia ope formularum (24. et 1.) coordinatae r et l, quibus planetae locus in orbita determinatur, innotescent.

9. Jam ut variatio elementi ε sive longitudinis mediae in epocha eliciatur, videamus antea, quantum anomalia media M, quae per E et e, ideoque ob (24.) per r, a et e definita est, propter variationes elementorum a et e mutetur. Differentiatione formularum (28. et 24.) secundum M, E, e et a nanciscimur:

$$dM = (1-e\cos E)\,dE - \sin E\,de,$$
$$(1-e\cos E)\,da = a\cos E\,de - ae\sin E\,dE;$$

ergo post eliminationem ipsius dE:

$$ae\sin E\,dM + (1-e\cos E)^2\,da = a(\cos E - e)\,de.$$

Ex (24.) autem fluit:

$$1-e\cos E = \frac{r}{a}, \quad \cos E - e = \frac{a-r}{ae} - e = \frac{p-r}{ae} = -\frac{rx}{ae} \ (1^{**}.),$$

et ex (25. et 23.) conjunctim:

$$aaee\sin E^2 = \frac{rrr^2}{nnaa} = \frac{arryy}{p} \ (6.\text{ et }8.);\ \text{ergo}$$

$$\sqrt{\frac{a}{p}}\cdot y\,dM + \frac{r}{aa}\,da = -\frac{x}{e}\,de.$$

Substituendo in hac formula pro da et de valores ex (20. et 21.), prodit

$$\sqrt{\frac{a}{p}}\cdot y\,dM = -\left(\frac{2r}{p}+\frac{x}{ee}\right)y P_1\,dt - \left[2+\frac{x}{ee}\left(\frac{ryy}{p}-2x\right)\right]Q_1\,dt,$$

vel paulo simplicius, si in coëfficiente ipsius Q_1 $ee-yy$ pro xx, ac deinde $\frac{r}{p}+1$ pro $\frac{rx}{p}+2$ (artcl. 6.) ponimus:

$$dM = -\sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{2r}{p}+\frac{x}{ee}\right)P_1\,dt - \sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\frac{y}{ee}\left(\frac{r}{p}+1\right)Q_1\,dt.$$

10. Quum sit $M+\omega=\lambda$ (26.), si variationi anomaliae mediae modo erutae addimus variationem longitudinis perihelii in (22.) exhibitam, assequemur variationem longitudinis mediae

$$= \left[\frac{x}{ee} - \sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{2r}{p}+\frac{x}{ee}\right)\right]P_1\,dt + \frac{y}{ee}\left(1-\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\left(\frac{r}{p}+1\right)Q_1\,dt.$$

Atque haec est variatio, quam longitudo media per temporis elementum dt subit non ob planetae progressum medium per idem tempusculum, qui est $=ndt$, sed propter simultaneas variationes elementorum a, e, ω, ex quibus et ex r longitudo media darivari potest (confer artcl. 8.). Erit igitur, si hanc partialem ipsius λ variationem per $(d\lambda)$ et totalem per $d\lambda$ exprimimus:

$$(29.) \qquad d\lambda = (d\lambda) + ndt.$$

Haec vero partialis variatio ($d\lambda$) erit simul variatio $d\varepsilon$ longitudinis mediae in epocha, dummodo hanc longitudinem non per $\varepsilon = \lambda - nt$, ut in (27.), sed, respectu habito continuae variationis motus medii n, per

$$(30.) \qquad \varepsilon = \lambda - \int_0^t n\,dt$$

definimus. Ex hac enim formula, quae, si planeta non perturbatur, ideoque n constans est, cum priori omnino congruit, ex hac inquam formula differentiando efficitur $d\varepsilon = d\lambda - n\,dt$, $= (d\lambda)$ propter (29.); dum ex priori concludendum fuisset $d\varepsilon = d\lambda - n\,dt - t\,dn$, $= (d\lambda) - t\,dn$.

Hac posteriori igitur definitione utentes secundum formulam ipsius $(d\lambda)$ valorem exhibentem habebimus:

$$\text{VI.} \quad d\varepsilon = -\left[\left(1-\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\frac{\cos v}{e} + 2\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\frac{r}{p}\right]\boldsymbol{P}_1\,dt + \left(1-\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\left(\frac{r}{p}+1\right)\frac{\sin v}{e}\boldsymbol{Q}_1\,dt,$$

cui de supradictis causis addendus est terminus $(1-\cos\iota)\,d\vartheta$.

11. Methodi perturbationum, de qua hic agitur, problema principale versatur in eo, ut ex datis pro tempore quodam t_0 sex elementis planetae ellipticis, quae sint a_0, e_0, ω_0, ι_0, ϑ_0, ε_0, et quae dehinc pendent p_0, n_0, inveniantur pro alio quopiam tempore t_1 elementa elliptica a_1, e_1, ω_1, etc.; et ut his inventis locus planetae pro tempore t_1 calculetur. Solvitur hoc problema integrando primum expressiones I., II., ... VI., quas pro da, de, ... $d\varepsilon$ evolvimus, inde a $t = t_0$ usque ad $t = t_1$; hinc enim prodeunt differentiae $a_1 - a_0$, $e_1 - e_0$, etc. Jam ut ex elementis a_1, e_1, ..., quae sic innotuerunt, locus planetae pro tempore t_1 reperiatur, primum longitudo media λ_1 pro eodem tempore investiganda est. Quae quum sit $= \varepsilon_1 + \int_{t_0}^{t_1} n\,dt$, duplex adhuc integratio peragatur necesse est; habetur enim

$$n = n_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt}\,dt, \text{ ergo } \int_{t_0}^{t_1} n\,dt = n_0(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt}\,dt.$$

Quae autem ad hunc scopum requiritur expressio ipsius dn, protinus ex formula (6.) differentiata et ex I. demanat:

$$dn = -\tfrac{3}{2}\frac{n}{a}\,da = -3\frac{ane}{p}\sin v\cdot\boldsymbol{P}_1\,dt - 3\frac{an}{r}\boldsymbol{Q}_1\,dt.$$

Longitudine media λ_1 hoc modo reperta radius vector et longitudo vera ratione in articulo 8. jam significata elici queunt. Indicatae autem integrationes, quum reapse institui nequeant, quomodo mechanice per quadraturas absolvendae sint, non hujus loci est dicere.

---

12. Ut iis, quae de elementorum variationibus hucusque disserui, nunc finem imponam, nonnulla addere liceat de relationibus, quae inter has variatio-

nes locum habent. Quanquam enim sex elementorum motus elliptici nullum a reliquis pendet, tamen inter variationes eorum ab ictu aliquo exortas relationes exsistunt, et ea quidem de causa, quod duabus ellipsibus, in quibus planeta ante et post ictum movetur, non modo sol communis focus, sed etiam locus, quem planeta momento ictus occupat, commune punctum est.

Ad quod ulterius disquirendum meminisse primum juvat lemmatis ex descriptione ellipseos immediate fluentis: ellipsin perfecte datam esse, si duo ejus foci S et F et quodpiam peripheriae punctum P pro datis haberi queant. Quamobrem sole exsistente in S et planeta momento ictus in P, foco altero ante ictum in F, post ictum in F', orbita ante ictum ex S, P, F, post eum ex S, P, F' cognoscetur, et idcirco variatio orbitae variatione foci ex F in F' progredientis, ergo variationibus trium coordinatarum data erit, quibus punctum F' in spatio determinatur. Ex his igitur tribus variationibus variationes sex elementorum derivare licebit; unde tandem concludimus, a tribus sex elementorum variationibus, quamvis non a qualibuscunque tribus, tres reliquas pendere. Caeterum idem ex eo quoque colligi potest, quod variationes da, de, $d\omega$, $d\varepsilon$ solummodo a $dr_{,}$, $dl_{,}$ et variationes di, $d\vartheta$ ab unico $d\sigma$ pendent.

13. Quum variationes sex elementorum ex variationibus coordinatarum foci F inveniri possint, haud abs re erit, expressiones harum trium variationum investigare, vel etiam variationum, quas coordinatae centri ellipseos subeunt et quae semissibus priorum manifesto aequales sunt. Respectu trium axium coordinatorum, quorum origo communis in solem cadit, et quorum primus directionem radii vectoris habet, secundus in plano orbitae radio normalis, tertius plano ipsi normalis est, coordinatae tres centri orbitae sunt ax, ay, O (confer articl. 1.). Hinc variationes centri orbitae in directione primi et secundi axis sunt $adx + xda$ et $ady + yda$, vel substitutis pro dx, dy, da valoribus ex artcl. 6.:

$$d\cdot ax = 2\frac{ax\cdot ay}{p}P_1\,dt - 2a\left(1-\frac{ax}{r}\right)Q_1\,dt,$$

$$d\cdot ay = \left(a+2\frac{ay\cdot ay}{p}\right)P_1\,dt + \left(\frac{2a}{r}+\frac{r}{p}\right)ay\,Q_1\,dt.$$

Variatio tertio axi parallela ex articulo 5. sine difficultate eruitur. Quum enim planum orbitae tempusculo dt per angulum $d\sigma$ circa radium vectorem rotetur, et quum orbitae centri distantia a radio sit $= ay$, orbitae centrum durante hoc dt per spatiolum $= ay\,d\sigma$ in directione ad planum normali promovebitur. Ergo, si hoc spatiolum symmetriae causa per $d\cdot az$ exprimimus, et quum sit

$$d\sigma = \frac{rR}{\sqrt{(\mu p)}}dt = \frac{r}{p}R_1\,dt \text{ (artcl. 6.)}, \text{ erit: } d\cdot az = \frac{r}{p}ay\,R_1\,dt.$$

14. Valores pro $d\cdot ax$ et $d\cdot ay$ modo exhibiti, quando excentricitas orbitae perparva est, ad consectaria quaedam satis memorabilia deducunt. Excentricitate enim plane neglecta hi valores coeunt in formas simplicissimas:

$$d\cdot ax = -2aQ_1 dt, \quad d\cdot ay = aP_1 dt,$$

vel quia $P_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot P$, $Q_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot Q$ (19.), et neglecta excentricitate $\sqrt{\frac{p}{\mu}} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{1}{na}$ (6.) est:

$$nd\cdot ax = -2Qdt, \quad nd\cdot ay = Pdt.$$

Ut, quid hae formulae indicent, eo facilius intelligatur, ponamus celeritatem, qua centrum ellipseos progreditur, $= u$, vim perturbantem $= T$, angulos, quos directiones iparum u et T cum radio vectore faciunt, $= v$ et τ; denique vis perturbantis ideoque etiam celeritatis u directionem in plano orbitae ipso contentam assumamus. Quo facto erit

$$d\cdot ax = u\cos v\cdot dt, \quad d\cdot ay = u\sin v\cdot dt, \quad P = T\cos\tau, \quad Q = T\sin\tau,$$

et formulae istae mutabuntur in

$$nu\cos v = -2T\sin\tau, \quad nu\sin v = T\cos\tau,$$

vel si $\tau + 90^0 = \tau'$ statuimus:

$$nu\cos v = 2T\cos\tau', \quad nu\sin v = T\sin\tau'.$$

Ex his videmus primum, si angulus τ' sit $= 0$, vel $= 90^0$, 180^0, 270^0, eundem valorem etiam angulum v habiturum esse; pro quovis alio valore ipsius τ' valorem ipsius v ab eo discrepaturum, ita tamen, ut ambo anguli in eundem quadrantem cadant, et ut eorum differentia non superet $19^0 28' = \text{arc}(\text{tang} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})$; is enim est maximus valor, quem differentia angulorum τ' et v aequatione $2\,\text{tang}\, v = \text{tang}\,\tau'$ inter se junctorum adipisci potest. Sequitur ex his theorema illud, quod in „Elementis mechanicae celestis" pagina 314 proposui: ***Directionem, secundum quam centrum orbitae paulum excentricae procedat, a directione vis perturbantis per quadrantem ulterius promotae non admodum declinare, ad summum angulo undeviginti et semissis graduum.***

Eaedem denique formulae docent: ***Celeritatem, qua centrum promoveatur, maximum valorem adipisci,*** $= 2T:n$, pro $\tau = 90^0$ et 270^0, h. e. ***si vis perturbans radio vectori normaliter insistat; minimum contra valorem, dimidio maximi aequalem,*** $= T:n$, pro $\tau = 0$ et 180^0, h. e. ***si directio vis perturbantis in radium cadat; et hunc minimum valorem ad vim perturbantem rationem eandem tenere, quam planetae a sole distantia*** (a) ***ad planetae celeritatem*** (na).

Lipsiae 1844.

13.

Sur quelques propriétés des déterminants gauches.

(Par Mr. *A. Cayley* de Cambridge.)

I.

Je donne le nom de ***déterminant gauche,*** à un déterminant formé par un système de quantités $\lambda_{r,s}$ qui satisfont aux conditions

$$(1) \qquad \lambda_{r,s} = -\lambda_{s,r} \quad [r \neq s].$$

J'appelle aussi un tel système, ***système gauche.*** On obtiendra des formules plus simples (quoique cette supposition ne soit pas essentielle), en considérant seulement les systèmes pour lesquels on a aussi

$$(2) \qquad \lambda_{r,r} = 1.$$

Je suppose dans tout ce qui va suivre, que le déterminant est de l'ordre n, et que par conséquent les suffixes variables r, s etc. s'étendent toujours depuis l'unité jusqu'à n.

En posant les équations

$$(3) \qquad \Sigma_r \lambda_{r,s} x_r = P_s, \qquad \Sigma_s \lambda_{r,s} x_s = Q_r,$$

j'exprime les systèmes inverses qui déterminent les P, Q par les x, de la manière suivante:

$$(4) \qquad K x_r = \Sigma_s \Lambda_{r,s} P_s \quad \text{et} \quad K x_s = \Sigma_r \Lambda_{r,s} Q_r,$$

où K désigne le déterminant formé d'avec les quantités $\lambda_{r,s}$, et $\Lambda_{r,s}$ le coëfficient différentiel de K par rapport à $\lambda_{r,s}$; bien entendu, que la différentiation doit être effectuée avant d'avoir particularisé ces quantités par les équations (1), (2). On sait que ces fonctions Λ satisfont aux conditions

$$(5) \qquad \begin{cases} \Sigma_r \lambda_{r,s} \Lambda_{r,s'} = 0 & s \neq s', \\ \Sigma_r \lambda_{r,s} \Lambda_{r,s} = K, & \\ \Sigma_r \lambda_{r,s} \Lambda_{r',s} = 0 & r \neq r', \\ \Sigma_s \lambda_{r,s} \Lambda_{r,s} = K. & \end{cases}$$

Je tiré des équations (4), en échangeant r et s dans la dernière de ces équations:

$$(6) \qquad \Sigma_s \Lambda_{r,s} P_s = \Sigma_s \Lambda_{s,r} Q_s.$$

Et de là, en multipliant respectivement les différentes équations de ce système par $\lambda_{s',r}$, et prenant la somme de ces produits:

$$(7) \qquad \Sigma_s (\Sigma_r \lambda_{s',r} \Lambda_{r,s}) P_s = \Sigma_s (\Sigma_r \lambda_{s',r} \Lambda_{s,r}) Q_s.$$

On a d'abord par les équations (5)

$$(8) \qquad \Sigma_s(\Sigma_r \lambda_{s'.r} \Lambda_{s.r}) Q_s = K Q_{s'}.$$

Puis par les équations (1 et 2)

$$(9) \qquad \Sigma_r \lambda_{s'.r} \Lambda_{r.s} = 2\Lambda_{s'.s} - \Sigma_r \lambda_{r.s'} \Lambda_{r.s},$$

c'est-à-dire par les équations (5):

$$(10) \qquad \begin{cases} \Sigma_r \lambda_{s'.r} \Lambda_{r.s} = 2\Lambda_{s'.s} & s' \neq s \text{ et} \\ \Sigma_r \lambda_{s'.r} \Lambda_{r.s'} = 2\Lambda_{s'.s'} - K; \end{cases}$$

ce qui donne

$$(11) \qquad \Sigma_s(\Sigma_r \lambda_{s'.r} \Lambda_{r.s}) P_s = 2(\Sigma_s \Lambda_{s'.s} P_s) - K P_{s'}.$$

Substituant les équations (8 et 11) dans la formule (7), on obtiendra, en écrivant r au lieu de s':

$$(12) \qquad K Q_r = 2(\Sigma_s \Lambda_{r.s} P_s) - K P_r,$$

et également

$$(13) \qquad K P_s = 2(\Sigma_r \Lambda_{r.s} Q_r) - K Q_s.$$

Posant maintenant

$$(14) \qquad \begin{cases} K\alpha_{r.s} = 2\Lambda_{r.s} & r \neq s \text{ et} \\ K\alpha_{r.r} = 2\Lambda_{r.r} - K: \end{cases}$$

les formules (12), (13) se changeront en

$$(15) \qquad Q_r = \Sigma_s \alpha_{r.s} P_s \quad \text{et} \quad P_s = \Sigma_r \alpha_{r.s} Q_r:$$

équations qui sont nécessairement équivalentes. On a donc identiquement

$$(16) \qquad \begin{cases} (1) \begin{cases} \Sigma_r \alpha_{r.s} \alpha_{r.s'} = 0 & s \neq s', \\ \Sigma_r \alpha_{r.s} \alpha_{r.s} = 1, \end{cases} \\ (2) \begin{cases} \Sigma_s \alpha_{r.s} \alpha_{r'.s} = 0 & r \neq r', \\ \Sigma_s \alpha_{r.s} \alpha_{r.s} = 1: \end{cases} \end{cases}$$

c'est-à-dire, on a trouvé un système de (n^2) quantités $\alpha_{r.s}$, fonctions explicites et rationnelles d'un nombre $\frac{1}{2}n(n-1)$ de variables indépendantes, qui satisfont identiquement aux formules (16, 1) ou (16, 2). On sait qu'en géométrie cela veut dire que pour $n = 2$ ou $n = 3$ de tels systèmes donnent les coëfficients propres à effectuer la transformation de deux systèmes de coordonnées rectangulaires; nous dirons par analogie, que des systèmes qui satisfont aux équations (16.) pour une valeur quelconque de n, sont propres à effectuer la transformation entre deux systèmes de coordonnées rectangulaires. On a donc le théorème suivant:

Les coëfficients propres à la transformation de coordonnées rectangulaires, peuvent être exprimés rationnellement au moyen de quantités ar-

bitraires $\lambda_{r.s}$, soumises aux conditions

$$\lambda_{r.s} = -\lambda_{s.r} \ [r \neq s]; \quad \lambda_{r.r} = 1.$$

Pour les développer, il faut d'abord former le déterminant K de ce système, puis le système inverse $A_{r.s}$, ... et écrire

$$K\alpha_{r.s} = 2A_{r.s} \ [r \neq s]; \quad K\alpha_{r.r} = 2A_{r.r} - K;$$

ce qui donne le système cherché.

Soit par exemple $n = 3$. Écrivons pour le système des quantités $\lambda_{r.s}$:

$$(17) \quad \begin{cases} 1, & \nu, & -\mu, \\ -\nu, & 1, & \lambda, \\ \mu, & -\lambda, & 1, \end{cases}$$

ce qui donne $K = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$, et pour le système des fonctions $A_{r.s}$

$$(18) \quad \begin{cases} 1+\lambda^2, & \lambda\mu+\nu, & \nu\lambda-\mu, \\ \lambda\mu-\nu, & 1+\mu^2, & \mu\nu+\lambda, \\ \nu\lambda+\mu, & \mu\nu-\lambda, & 1+\nu^2. \end{cases}$$

Delà on obtient pour le système de coëfficients $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma';\ \alpha'', \beta'', \gamma''$:

$$(19) \quad \begin{cases} K\alpha = 1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & K\alpha' = 2(\lambda\mu+\nu), & K\alpha'' = 2(\nu\lambda-\mu), \\ K\beta = 2(\lambda\mu-\nu), & K\beta' = (1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2), & K\beta'' = 2(\mu\nu+\lambda), \\ K\gamma = 2(\nu\lambda+\mu), & K\gamma' = 2(\mu\nu-\lambda), & K\gamma'' = (1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2); \end{cases}$$

ce qui se rapporte à la transformation

$$(20) \quad \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, & x_1 = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ y = \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, & y_1 = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ z = \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1 & z_1 = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

de deux systèmes de coordonnées rectangulaires. En effet, les coëfficients λ, μ, ν ont une signification géométrique: Les axes Ax_1, Ay_1, Az_1 vont coïncider avec les axes Ax, Ay, Az, par la rotation θ autour d'un certain axe AR (qu'on peut nommer „Axe résultante"). En prenant f, g, h pour les inclinaisons de cet axe à Ax, Ay, Az, on a $\lambda = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta \cos f$, $\mu = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta \cos g$, $\nu = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta \cos h$. Cette expression de l'axe AR est due à *Euler;* les quantités λ, μ, ν ont été introduites pour la première fois, par M. *Olinde Rodrigues,* dans un mémoire „Sur les lois géométriques qui regissent les déplacements d'un système solide" (*Liouville* Tome V.), où il donne les expressions qu'on vient de trouver ici, pour les coëfficients de la transformation, en termes de λ, μ, ν. Ces mêmes quantités λ, μ, ν (il y a à remarquer cela en passant) sont liées de la manière la plus étroite avec celles de la belle théorie de Sir *W. Hamilton*

sur les Quaternions. Je les ai appliquées à la théorie de la rotation d'un corps solide. Avant de donner une idée des résultats auxquels je suis parvenu, je passe aux formules de transformation qui se rapportent au cas de $n = 4$. Je prends ici pour le système des quantités λ:

$$(21)\quad \begin{cases} 1, & a, & b, & c, \\ -a, & 1, & -h, & g, \\ -b, & h, & 1, & -f, \\ -c, & -g, & f, & 1, \end{cases}$$

ce qui donne, en mettant pour abréger $af+bg+ch=\theta$,

$$(22)\quad K = 1+a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2+\theta^2,$$

et puis pour les quantités $A_{r,s}$ le système

$$(23)\quad \begin{cases} 1+f^2+g^2+h^2, & f\theta+a+bh-cg, & g\theta+b+cf-ah, & h\theta+c+ag-bf, \\ -f\theta-a+bh-cg, & 1+f^2+b^2+c^2, & -c\theta-h+fg-ab, & b\theta+g-hf-ca, \\ -g\theta-b+cf-ah, & c\theta+h+fg-ab, & 1+g^2+c^2+a^2, & -a\theta-f+gh-bc, \\ -h\theta-c+ag-bf, & -b\theta-g+hf-ca, & a\theta+f+gh-bc, & 1+h^2+a^2+b^2, \end{cases}$$

de manière que pour

$$(24)\quad \begin{cases} K\alpha, & K\alpha', & K\alpha'', & K\alpha''', \\ K\beta, & K\beta', & K\beta'', & K\beta''', \\ K\gamma, & K\gamma', & K\gamma'', & K\gamma''', \\ K\delta, & K\delta', & K\delta'', & K\delta''', \end{cases}$$

on obtient le système suivant:

$$(25)\quad \begin{cases} 1+f^2+g^2+h^2-a^2-b^2-c^2, & 2(f\theta+a+bh-cg), & 2(g\theta+b+cf-ah), & 2(h\theta+c+ag-bf), \\ 2(-f\theta-a+bh-cg), & 1+f^2+b^2+c^2-g^2-h^2-a^2, & 2(-c\theta-h+fg-ab), & 2(b\theta+g-hf-ca), \\ 2(-g\theta-b+cf-ah), & 2(c\theta+h+fg-ab), & (1+g^2+c^2+a^2-f^2-h^2-b^2), & 2(-a\theta-f+gh-bc), \\ 2(-h\theta-c+ag-bf), & 2(-b\theta-g+hf-ca), & 2(a\theta+f+gh-bc), & (1+h^2+a^2+b^2-f^2-g^2-c^2), \end{cases}$$

et ainsi de suite pour des valeurs quelconques de n.

II.

Maintenant je vais citer les formules que j'ai présentées dans le Journal de Cambridge Tome III. p. 225, pour la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Mettant, comme à l'ordinaire les vitesses angulaires autour des axes principaux $= p, q, r$; les *moments* du corps pour ces mêmes axes $= A, B, C$ et la fonction des forces $= V$: les équations citées pourront être écrites sous la forme

$$(26)\quad dt = \frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\lambda}{A} = \frac{d\mu}{M} = \frac{d\nu}{N},$$

où

$$(27)\quad \begin{cases} P = \frac{1}{A}\Big((B-C)qr + \frac{1}{2}\Big\{(1+\lambda^2)\frac{dV}{d\lambda} + (\lambda\mu+\nu)\frac{dV}{d\mu} + (\lambda\nu-\mu)\frac{dV}{d\nu}\Big\}\Big), \\ Q = \frac{1}{B}\Big((C-A)rp + \frac{1}{2}\Big\{(\mu\lambda-\nu)\frac{dV}{d\lambda} + (1+\mu^2)\frac{dV}{d\mu} + (\mu\nu+\lambda)\frac{dV}{d\nu}\Big\}\Big), \\ R = \frac{1}{C}\Big((A-B)pq + \frac{1}{2}\Big\{(\nu\lambda+\mu)\frac{dV}{d\lambda} + (\mu\nu-\lambda)\frac{dV}{d\mu} + (1+\nu^2)\frac{dV}{d\nu}\Big\}\Big), \\ \mathcal{A} = \frac{1}{2}\big((1+\lambda^2)p + (\lambda\mu-\nu)q + (\lambda\nu+\mu)r\big), \\ M = \frac{1}{2}\big((\mu\lambda+\nu)p + (1+\mu^2)q + (\mu\nu-\lambda)r\big), \\ N = \frac{1}{2}\big((\nu\lambda-\mu)p + (\nu\mu+\lambda)q + (1+\nu^2)r\big). \end{cases}$$

En effet, pour obtenir ces formules, il n'y a qu'à chercher au moyen de λ, μ, ν et de leurs derivées par rapport aux temps λ', μ', ν' l'expression de la fonction $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$ [qui exprime la demi-somme des forces vives]: cela fait, les formules générales que ***Lagrange*** a données pour la solution des problèmes de dynamique, conduisent immédiatement aux équations en question. Dans le mémoire cité j'ai intégré ces équations pour le cas ou la fonction V est zéro, et en prenant, comme dans la théorie ordinaire, le plan invariable pour plan des deux axes. Ce n'est que dernièrement que j'ai trouvé la manière convenable de traiter ce système d'équations; je le fais au moyen de deux nouvelles variables Ω, v, entre lesquelles je trouve une équation différentielle dont les variables sont séparées, et j'exprime en termes de celles-ci les autres variables du problème, y compris le temps; et cela sans aucune supposition particulière, relative a la position des axes des coordonnées par rapport au plan invariable. Le developpement de cette théorie paraîtra dans le prochain N°. du „Cambridge et Dublin Mathématical journal." Je m'occupe aussi de la recherche des formules pour les variations des constantes arbitraires relatives aux forces perturbatrices. Il serait bien intéressant (comme problème d'analyse pure) d'étendre ces recherches au cas d'une valeur quelconque de n; il faudrait pour cela, chercher les valeurs des quantités analogues à p, q, r, former une fonction T, en prenant la somme des carrés de chacune de ces quantités, chaque carré multiplié par un coëfficient constant, et puis former les équations $\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{d\lambda'} - \frac{dT}{d\lambda} = 0$ etc., analogues aux équations de Dynamique. Mais je n'ai encore rien trouvé sur ce sujet.

Cambridge 24ième Févr. 1846.

14.

MÉMOIRE
sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer.

Une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits.

(Par l'éditeur.)

(Suite du No. 3 du cahier précédant.)

Locomotive à air de la première sorte, où l'air comprimé est introduit dans les cylindres de la machine pendant la course entière des pistons.

a. Description de cette locomotive, et de ses effets.

33.

A. Une locomotive à air, comme il a été déjà dit ci-dessus, pourra être construite comme une locomotive à vapeur, avec cette différence seulement qu'elle n'aura ni chaudière, ni foyer, ni cheminée. Les figures qui représentent une locomotive à vapeur, représentent donc également une locomotive à air, en tout ce qui concerne les roues, essieux, manivelles, cylindres, tiroirs, excentriques etc. Nous empruntons les figures nécessaires pour ce qui suit, à la première édition du „Traité de locomotives à vapeur de Mr. ***de Pambour***." Les différences entre une locomotive à vapeur et une locomotive à air sont les suivantes.

B. L'air comprimé prend ici la place de la vapeur. Le tube ***V*** fig. 13 conduit ici dans les cylindres, non pas de la ***vapeur,*** tirée de la chaudière, mais de l'***air comprimé,*** tiré du réservoir, soit que ce réservoir soit un tube fixe placé entre les rails, ou que l'air soit renfermé dans plusieurs cylindres en tôle de fer placés sur la locomotive même, et peut-être encore sur un ou deux wagons qui la suivent immédiatement. Si le piston du cylindre de la machine est dans la position que représentent les figures 13, 14 et 15, l'air comprimé

entre dans le cylindre par le tube ouvert 1, et y occupe la partie du volume du cylindre à gauche du piston; il pousse alors le piston de gauche à droite. L'air qui remplit l'autre partie du volume du cylindre à droite du piston, et qui n'est pas comprimé, s'échappe par les passages 2 et *e*, mais ici, non pas dans la *cheminée*, comme la vapeur, mais dans *l'atmosphère*. Aussitôt que le piston a atteint le fond du cylindre à droite, le levier *k*, fig. 15, au moyen du tiroir, a fermé le canal 1 et ouvert le canal 2. Le tuyau *e reste* ouvert. L'air comprimé entre alors par le passage 2 dans l'espace du cylindre à droite du piston, le pousse de droite à gauche, et l'air *comprimé* qui se trouve à gauche du piston, sort dans l'atmosphère par les passages 1 et *e;* et ainsi de suite. L'air comprimé pousse ainsi le piston alternativement de gauche à droite et de droite à gauche, fait tourner par là les manivelles *zy* (fig. 13) et les roues de propulsion, et pousse au moyen de celles-ci le train des wagons le long de la voie.

C. C'est ce qui arrive dans les cas où la force de la machine, que lui donne l'air comprimé, doit pousser le train. Mais sur des pentes de la voie qui sont assez fortes, pour que la gravité produise une force propulsive qui l'emporte sur la résistance des wagons (ce qui arrive sur toutes les pentes plus fortes que $n = 0{,}004$), non seulement aucune force de la machine n'est nécessaire, mais au contraire on gagne un *excédant* de force, et cet excédant peut être utilisé pour tirer de l'air de l'atmosphère *pendant* la course des wagons, et pour le comprimer dans les réservoirs, où il peut servir subsidiairement à la continuation du trajet. A cette fin, la machine doit avoir les parties additionnelles suivantes.

D. Premièrement le tuyau *Vv* (fig. 13) qui, dans les locomotives à vapeur, conduit dans le cylindre la *vapeur* de la chaudière, et dans les locomotives à air, *l'air comprimé* des réservoirs, doit avoir un *robinet* qui, étant tourné d'un angle droit, ferme le passage de *V* à *v* (fig. 13), et ouvre en même temps par le même tuyau et par le robinet le passage de *v* dans l'atmosphère. Désignons ce robinet par H_1.

Deuxièmement. Le tuyau qui, dans les locomotives à vapeur conduit à la cheminée la vapeur qui a fait ses services, doit ici déboucher dans un *second réservoir* B_2 et être muni d'un robinet H_2 semblable à celui H_1, déstiné à fermer le passage au second réservoir, et à ouvrir en même temps le passage à l'atmosphère; et étant tourné d'un angle droit, à fermer le second passage, et à ouvrir en même temps le premier.

E. a. Cela posé, si comme ci-dessus c'est ***l'air comprimé*** qui doit pousser le ***piston*** dans le cylindre (ce qui est le cas de toutes les pentes de la voie $> -n$), on tourne le robinet H_1 de manière qu'il ouvre à l'air comprimé le passage de V en v, c'est-à-dire le passage des réservoirs d'air au cylindre, et qu'il ferme en même temps le passage du cylindre à l'atmosphère. L'autre robinet H_2 doit être tourné de manière à ouvrir à l'air comprimé qui a servi, le passage à l'atmosphère, et à lui fermer en même temps le passage dans le second réservoir B_2.

b. Si au contraire la pente de la route est assez forte, pour que la gravité produise une force propulsive plus grande que celle de la résistance du train sur les rails, et qu'on veuille utiliser cet excédant de force pour tirer de l'air de l'atmosphère, et pour le comprimer dans le second réservoir B_2, on tourne le robinet H_1 de manière à fermer à ***l'air comprimé*** contenu dans les grands réservoirs le passage vers le cylindre, et à ouvrir en même temps à ***l'air atmosphérique*** le passage dans le même cylindre. On tourne l'autre robinet H_2 de manière qu'il ferme à l'air contenu dans le cylindre le passage à l'atmosphère, et qu'il lui ouvre en même temps le passage vers le second réservoir B_2; tout cela complètement opposé à ce qu'il y a à faire dans le premier cas (*a.*). Voyons ce qui se passera alors.

Dans le second cas, ce n'est pas le ***piston*** qui par sa force fait tourner les roues de propulsion et pousse par là le train: au contraire ce sont maintenant les ***roues de propulsion*** qui impriment au piston son mouvement de va-et-vient. Supposons que le piston soit poussé de cette manière de gauche à droite (fig. 15), il ***chassera*** par ***e*** l'air qui se trouve à droite entre lui et le fond du cylindre. Mais le robinet H_2 a ***fermé*** à cet air le passage vers l'atmosphère, et il lui a ***ouvert*** le passage dans le second réservoir B_2: donc l'air contenu dans la partie à droite du cylindre sera ***poussé*** par le piston dans le réservoir B_2 et y sera ***comprimé***. Mais en même temps le tuyau **1** fig. **14**, est ***ouvert***, et laisse entrer l'air atm. dans le cylindre, mais non pas l'air ***comprimé***, venant des grands réservoirs; car le robinet H_1 a fermé la communication entre les grands réservoirs B_1 et le cylindre, et il a ouvert celle entre le cylindre et l'atmosphère. C'est donc de l'air ***atmosphérique***, et non pas de l'air ***comprimé***, qui entrera dans le cylindre à gauche du piston. Si maintenant les roues de propulsion, en continuant leur mouvement de rotation, tirent le piston dans le sens opposé, de droite à gauche, le tiroir ferme le passage **1** et ouvre le passage **2**. L'air ***atmosphérique*** entre par le tuyau **2**, et va occuper l'espace

à droite du piston; et l'air atmosphérique, qui auparavant était entré dans l'espace à gauche du piston, en est chassé, et cela non pas vers l'atmosphère, mais dans le second réservoir B_2 où il est comprimé de son côté; et ainsi de suite.

F. Ce second réservoir B_2 est donc

Troisièmement encore une partie d'une locomotive à air, qu'une locomotive à vapeur ne possède pas. Sa capacité doit être fixée de manière que l'air n'y soit pas comprimé à une tension plus forte que celle que la force de la gravité peut vaincre sur les plus fortes pentes.

G. L'air comprimé dans le réservoir B_2 peut être utilisé aussi pour modérer les trop grandes vitesses du train. Pour cela il faut que la grandeur et la solidité de ce réservoir soient conformes au volume des cylindres, au poids du train, à la roideur et la longueur des pentes $> -n$. Alors on pourra empêcher par ce réservoir, que jamais les vitesses ne deviennent trop grandes. Aussi pourra-t-on, si l'on veut, arranger le réservoir de manière à arrêter tout-à-fait le train au bas d'une rampe descendue.

H. ***Quatrièmement.*** Une dernière différence entre les locomotives à air et à vapeur consiste dans un troisième réservoir B_3.

L'air contenu dans les grands réservoirs B_1 y doit être comprimé évidemment à un degré tel que sa tension, en agissant sur les pistons dans les cylindres, suffise pour pousser le train en amont des ***plus fortes*** pentes. Mais cette tension n'est pas nécessaire pour les autres parties de la route; elle est trop forte pour les parties moins inclinées, horizontales ou descendantes: aucune force propulsive n'est nécessaire pour ***descendre*** les pentes $= n$, et sur les pentes $< -n$ la gravité produit même une force propulsive ***plus forte*** que celle de la résistance des wagons. Il suit de là que l'air comprimé ne doit jamais être conduit ***immédiatement*** des réservoirs B_1 dans les cylindres, mais qu'un ***réservoir-médiateur*** (un troisième réservoir B_3), dans lequel l'air de B_1 est conduit avant de lui faire gagner les cylindres, est indispensable, pour y donner à l'air cette tension dont il a effectivement besoin sur chaque point de la voie. Dans ce réservoir-médiateur, la ***modération*** de la tension s'effectuera aisément au moyen d'un robinet H_3 placé dans le tuyau de communication entre B_1 et B_3, dont on se servira pour ne laisser entrer dans B_3 qu'autant d'air tiré de B_1, qu'il sera nécessaire pour produire la tension demandée.

I. A la rigueur, on pourra même se passer d'un baromètre ou d'un manomètre pour mesurer à chaque moment la tension de l'air dans B_3. Aussitôt que le conducteur du train s'aperçoit que la marche du train commence

à ralentir, il ouvre un peu plus le robinet H_3. La vitesse, devient elle trop forte, il ferme un peu plus ce robinet. Arrivé à une pente où la gravité seule pousse le train, il ferme le robinet complètement; il tourne en même temps d'un angle droit les deux autres robinets H_1 et H_2, décrits ci-dessus, pour tirer de l'air de l'atmosphère et pour le faire comprimer dans le réservoir B_2. Il en agit de même quand il veut modérer beaucoup la vitesse, ou arrêter le train. Il est vrai, que cette dernière manoeuvre n'est pas propre à arrêter ***subitement*** le train, comme nous le verrons plus bas: cela ne peut être effectué que par l'enrayement ordinaire; mais la manoeuvre viendra toujours en aide à cet enrayement.

K. Comme la compression d'air atmosphérique, que la machine est capable d'effectuer, ne commence jamais qu'au sommet d'une pente, où la gravité va produire un excédant de force propulsive, on peut supposer que, arrivée à un tel sommet, la tension de l'air dans le réservoir-médiateur B_3, ainsi que de celui dans le réservoir B_2, destiné à recevoir l'air que la machine y doit comprimer, ne l'emporte plus sur celle de l'air atmosphérique, si d'ailleurs le conducteur a bien prévu ce sommet. Donc les deux réservoirs B_2 et B_3 pourront aussi être mis en communication au moyen d'un tuyau muni d'un robinet, et en ouvrant ce robinet, on pourra de ces deux réservoirs n'en faire qu'un seul. Alors le volume qui sans cela est nécessaire au réservoir B_2 seul, suffirait aux réservoirs réunis. Comme au commencement d'une forte pente le troisième réservoir est toujours vide, et par conséquent propre au service que doit faire le second, un seul réservoir suffirait même à la place des deux. Cependant deux réservoirs seront toujours préférables à un seul: ***premièrement*** pour le cas où le conducteur n'aura pas pris soin de vider le troisième réservoir avant d'arriver au sommet de la forte pente; ***deuxièmement*** pour le cas où l'on voudra modérer la vitesse aussi promptement que possible, et où alors un petit ***réservoir*** est plus efficace qu'un grand, et ***troisièmement*** pour le cas où la voie a des fortes pentes, de longueurs très-différentes, et où alors l'un des deux réservoirs pourra servir pour les pentes moins considérables, et les deux réunis pour les pentes plus fortes et plus longues.

L. Le grand réservoir B dans le système N°. IV (comme il a été déjà dit ci-dessus) est un tuyau fixé entre les rails, d'où la locomotive tire l'air comprimé et l'introduit d'abord dans le réservoir-médiateur. Dans le système V, il consiste en plusieurs cylindres transportés par la machine même.

Nous calculerons maintenant les effets des locomotives à air.

b. Calcul de l'effet qu'exerce la tension de l'air dans une locomotive de la première sorte sur la résistance du train des wagons, et réciproquement.

34.

A. Dans la fig. 18 CC est un des deux cylindres, zz le piston, K_1S_1 la tige du piston, S_1M la bielle et MZ le bras de la manivelle. Désignons

Par Δ le diamètre CC_1 du cylindre ou du piston;

Par $\lambda = 2r$ la longueur KK_1 du cylindre, égale à une longueur double de celle du bras de la manivelle, et par conséquent égale à AD.

Soit la tension de l'air comprimé qui dans le cylindre agit sur le piston, $= 1 + \mu$ atm.

Soit D le diamètre des roues de propulsion de la locomotive.

Soit L la longueur de la voie parcourue par le train.

Soit $Z = Q(n + \text{tang}\,\beta)$ (103) la force de traction, égale à la résistance du poids Q du train sur la pente β.

Soit a la longueur S_1M de la bielle, puis

$$AP = x, \quad PM = y, \quad Pp = \partial x, \quad p_1p_2 = \partial y, \quad Ms = \partial s,$$

l'angle $MS_1A = \varphi$, l'angle $MZA = \alpha$.

Soit enfin p la force avec laquelle l'air agit sur le piston.

B. Cette force p produit une force $M_3M = p \sec\varphi$ suivant la direction S_1M.

Cette dernière force équivaut à deux autres, l'une $M_1M = p \sec\varphi \cos\varphi = p$, *parallèle* avec AZ, l'autre $MM_2 = p \sec\varphi \sin\varphi = p \,\text{tang}\,\varphi$, *perpendiculaire* sur AZ.

La première M_1M de ces deux forces équivaut à deux autres forces M_1M_4 et M_4M, dont la première, agissant suivant la direction MZ, est ici indifférente. L'autre, dont il s'agit, est $M_4M = M_1M \sin\alpha = p \sin\alpha$, et elle agit perpendiculairement sur le bras MZ de la manivelle.

La seconde MM_2 des deux forces ci-dessus équivaut à deux autres forces M_5M_2 et M_5M, dont la première, agissant suivant la direction MZ, est indifférente. L'autre est $M_5M = p \,\text{tang}\,\varphi \cos\alpha$, et elle agit perpendiculairement sur le bras de la manivelle.

Donc la somme des forces produites par p qui agissent *perpendiculairement* sur le bras de la manivelle, et que nous désignerons par q, est

141. $$q = M_4M + M_5M = p \sin\alpha + p \,\text{tang}\,\varphi \cos\alpha = p(\sin\alpha + \text{tang}\,\varphi \cos\alpha).$$

C. Comme

$$142.\quad \begin{cases} 1. & \sin\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{Mm}{Ms} = \dfrac{\partial x}{\partial s}, \\ 2. & \cos\alpha = \dfrac{r-x}{r} = \dfrac{ms}{Ms} = \dfrac{\partial y}{\partial s}, \\ 3. & \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{MP}{S_1P} = \dfrac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}, \end{cases}$$

l'expression de q (141) donne

$$142.\quad q = p\left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right).$$

D. Quand l'air comprimé dans le cylindre pousse le piston de K en K_4, la manivelle parcourt le demi-cercle ***supérieur AMD***, et quand il pousse le piston de K_4 en K, la manivelle décrit le demi-cercle ***inférieur DQA.*** Cela se fait toujours d'une manière parfaitement ***semblable***, c'est-à-dire de sorte, que quelle que soit la force p qui agit sur le piston dans ses différentes positions K, K_1, K_2 etc., soit ***constante*** soit ***variable***, la valeur de p relative par ex. au point M, est toujours parfaitement ***égale*** à la valeur de p relative au point Q diamétralement opposé à M: car tandis que la manivelle parcourt l'angle $AZM = \alpha$, le piston s'éloigne de K de la même distance qu'au retour de K_4, où la manivelle décrit l'angle DZQ égal à AZM.

E. La bielle, quand elle parcourt le demi-cercle ***supérieur, pousse*** la manivelle dans la direction S_1M: elle la ***tire*** suivant la direction QS_2, quand elle parcourt le demi-cercle ***inférieur DQA.***

Donc les forces M_1M et QQ que produit la force p, et dont les valeurs ***absolues*** sont les ***mêmes***, parceque à cause de $P_1Q = PM$ et $S_2Q = S_1M = a$, les angles P_1S_2Q et PS_1M sont égaux et φ, ont toujours le ***même signe***, et par cette raison les forces M_1M et Q_4Q_1 qui, étant produites par M_1M et QQ agissent perpendiculairement sur le bras de la manivelle, et dont les valeurs absolues à cause de $DZQ = AZM = \alpha$ sont également les mêmes, ont aussi toujours le ***même signe.***

Au contraire les forces M_2M et QQ_2 que produit la force p, et dont les valeurs absolues sont encore les mêmes, ont des ***signes opposés***, et par suite les forces M_5M et QQ_5 qui étant produites par M_2M et QQ_2 agissent aussi perpendiculairement sur le bras de la manivelle, et dont les valeurs absolues sont aussi les mêmes, ont toujours également ***des signes différents.***

Il est aisé de voir que tout cela a lieu pour ***toutes*** les positions possibles, diamétralement opposées de la manivelle. Par ex. les forces qui agissent per-

pendiculairement sur le bras de la manivelle lorsqu'il est dans la position ZN, sont N_1N_4 et N_2N_5: elles sont R_4R_1 et R_5R_2 si le bras est dans la position ZR, et N_1N_4 et R_4R_1 ont leurs signes *égaux*, tandis que N_2N_5 et R_5R_2 ont des signes *différents*.

F. Il en résulte que suivant (143), l'expression de la force qui agit perpendiculairement sur le bras de la manivelle, est

144. $q_1 = p\left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y\,\partial y}{\partial s\sqrt{(a^2-y^2)}}\right)$ pour le demi-cercle *supérieur*, et

145. $q_2 = p\left(\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{y\,\partial y}{\partial s\sqrt{(a^2-y^2)}}\right)$ pour le demi-cercle *inférieur*.

G. La force p fait parcourir à l'extrémité du bras de la manivelle la différentielle ∂s de l'arc s dans le temps ∂t: donc la différentielle du *moment* de cette force est

146.
$$\begin{cases} 1.\ \partial M_1 = q_1\partial s = p\,\partial x + \frac{py\,\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}} \text{ pour le demi-cercle } \textit{supérieur} \text{ et} \\ 2.\ \partial M_2 = q_2\partial s = p\,\partial x - \frac{py\,\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}} \text{ pour le demi-cercle } \textit{inférieur}. \end{cases}$$

H. Les intégrales de ces expressions donneront le *moment* pour tout un tour de la manivelle.

Désignons

147.
$$\begin{cases} 1. \begin{cases} \text{Par } A_1 \text{ l'intégrale de } p\,\partial x, \text{ prise pour l'angle } AZM = DZQ = \alpha; \\ \text{Par } A_2 \text{ cette même intégrale, prise pour l'angle } MZD = QZA = 2\varrho - \alpha; \end{cases} \\ 2. \begin{cases} \text{Par } B_1 \text{ l'intégrale de } \frac{py\,\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}, \text{ prise pour l'angle } AZM = DZQ = \alpha, \text{ et} \\ \text{Par } B_2 \text{ cette même intégrale, prise pour l'angle } MZD = QZA = 2\varrho - \alpha. \end{cases} \end{cases}$$

Cela posé, l'intégrale totale, prise pour toute une révolution de la manivelle, en commençant de M et en allant par D, Q et A jusqu'au point de départ M, est

148. $M = A_2 + B_2 + A_1 - B_1 + A_2 - B_2 + A_1 + B_1 = 2(A_1 + A_2)$.

Si la révolution de la manivelle commençait du point A, l'intégrale totale serait

149. $M = A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + A_1 - B_1 + A_2 - B_2 = 2(A_1 + A_2)$.

Les deux moments (148 et 149) ont la *même* valeur $2(A_1 + A_2)$: donc le moment de la force de la manivelle est toujours le même, quel que soit le point où commence son mouvement. Il en résulte que le moment de la force est le même pour l'une comme pour l'autre des *deux* manivelles de la machine, bien qu'elles fassent entre elles un angle droit.

I. La valeur de $A_1 + A_2$ dans (148 et 149) est celle de l'intégrale de $p\partial x$, prise pour tout le demi-cercle ***AMD;*** donc le moment M est l'intégrale de $2p\partial x$, prise pour le demi-cercle ***AMD.***

K. Dans le cas qui nous occupe, on suppose que l'air comprimé entre dans le cylindre pendant toute la durée de la course du piston et conserve une tension *invariable;* donc la force motrice p est ici ***constante,*** car elle est toujours la même, quelle que soit la position du piston. Donc le moment est ici pour l'un des deux cylindres

$$150. \quad M = 2px + \text{const.}$$

Ce moment étant zéro pour $x = 0$, la constante est $= 0$, et l'intégrale, prise pour tout le demi-cercle ***AMD,*** c'est-à-dire pour $x = 2r = \lambda$, est

$$151. \quad M = 2p\lambda.$$

L. L'aire du piston est $\frac{1}{4}\pi\Delta^2$, et la pression de l'air comprimé sur cette aire est $\frac{1}{4}\pi\Delta^2(1+\mu)\sigma$. Mais comme l'air atmosphérique réagit sur l'autre côté du piston avec une force de $\frac{1}{4}\pi\Delta^2\sigma$, la pression ***effective*** sur l'aire du piston n'est que

$$152. \quad p = \tfrac{1}{4}\pi\Delta^2\mu\sigma.$$

Cela étant substitué dans (151) donne $M = \frac{1}{2}\pi\Delta^2\lambda\mu\sigma$ pour ***un*** cylindre et

$$153. \quad M = \pi\Delta^2\lambda\mu\sigma \text{ pour } \textit{les deux} \text{ cylindres de la machine.}$$

M. La distance que parcourt le train des wagons pendant un tour de la manivelle est égale à la circonférence πD des roues de propulsion. Donc le *moment* de la résistance des wagons est

$$154. \quad Z\pi D.$$

Ce moment, devant être égal à celui de la force de la machine, donne

$$155. \quad Z\pi D = M = \pi\Delta^2\lambda\mu\sigma \ (153),$$

et de là on tire

$$156. \quad Z = Q(n + \operatorname{tang}\beta) = \frac{\lambda\Delta^2\mu\sigma}{D}.$$

Voilà l'expression de la *force de traction* que la locomotive fournit, quand l'air qui pousse les pistons est comprimé à une tension de $1+\mu$ atmosphères, et qu'il est introduit dans les cylindres durant *toute la course* des pistons.

N. Il est à remarquer, que la longueur a de la bielle, comme le font voir les résultats ci-dessus, n'entre pas dans (158), et est par conséquent indifférente.

35.

A. La formule (156) donne

$$157. \quad \mu = \frac{QD}{\lambda \Delta^2 \sigma}(n + \operatorname{tang}\beta),$$

ou aussi plus exactement, si l'on veut,

$$158. \quad \mu = \frac{QD}{\lambda \Delta^2 \sigma}(n + \operatorname{tang}\beta)\cos\beta.$$

De là on obtient la tension $1+\mu$ que l'air comprimé doit avoir dans les réservoirs principaux, quand à la place de β on mêt la pente la ***plus forte*** β_m de la voie.

B. Les roues de propulsion ont $\frac{L}{\pi D}$ tours à faire pour que le train parcoure la distance L. A chaque tour, la machine consomme ***quatre*** cylindres d'air comprimé, car à chaque tour chacun des deux pistons opère un va- et vient. Le volume d'un cylindre est $\frac{1}{4}\pi\Delta^2\lambda$, donc la consommation d'air est $4\cdot\frac{1}{4}\pi\Delta^2\lambda = \pi\Delta^2\lambda$ pour chacun des tours des roues de propulsion et

$$159. \quad \frac{L}{\pi D}\cdot\pi\Delta^2\lambda = \frac{L\Delta^2\lambda}{D}$$

pour toute la longueur L de la voie.

L'air atmosphérique occupe $1+\mu$ fois le volume d'air comprimé à la tension $1+\mu$: donc le volume d'air atmosphérique que la machine consomme pour le trajet L est

$$160. \quad S = \frac{L\Delta^2\lambda}{D}(1+\mu).$$

Substituant dans cette expression celle de μ (158), on obtient

$$S = \frac{L\Delta^2\lambda}{D} + \frac{LQ}{\sigma}(n + \operatorname{tang}\beta)\cos\beta \text{ ou bien}$$

$$161. \quad S = L\left[\frac{\Delta^2\lambda}{D} + \frac{Q}{\sigma}(n + \operatorname{tang}\beta)\cos\beta\right].$$

Puisque $\cos\beta$, comme il a été dit ci-dessus, est toujours peu différent de 1, la formule (161) peut être simplifiée et réduite à

$$162. \quad S = L\left[\frac{\Delta^2\lambda}{D} + \frac{Q}{\sigma}(n + \operatorname{tang}\beta)\right],$$

et cela avec d'autant plus de raison, que l'on calcule alors, non pas trop peu, mais un peu plus que ce qui est nécessaire.

C. Si même la pression de l'air comprimé sur les pistons des cylindres, comme il l'a été supposé ici, est ***constante,*** la force qu'elle produit sur le bras de la manivelle est loin de l'être également. Cette dernière force varie alternativement depuis sa plus grande valeur jusqu'à zéro. Néanmoins le mouve-

ment du train, produit par cette dernière force, n'est pas également variable, mais plutôt presque invariable, pour un β constant. La raison de cette contradiction apparente est *l'inertie* de la grande masse du train, qui remplace ici les *volants,* dont on se sert ordinairement pour rendre plus uniforme l'action des manivelles. A l'aide de cette régularisation du mouvement par la masse, vient ici encore la position des bras des deux manivelles sur le même essieu. Ils font entre eux un angle droit, de sorte que si la force exercée sur le bras de l'une des deux manivelles est à son *maximum,* celle qui agit sur l'autre est à son *minimum,* et réciproquement. Il ne s'agit donc ici que de la *somme* des moments variables des deux manivelles, et cette somme peut être supposée égale au moment presque invariable de la résistance du train.

D. Si la voie *monte* devant le train, β dans (162) doit être pris *positivement; négativement* si la route *descend,* et *zéro* si elle est *horizontale.* En désignant comme ci-dessus par h_1 la différence du niveau des deux extrémités de la distance L_1, et en supposant que sa pente β_1 est invariable, on a

$$163. \qquad h_1 = L_1 \operatorname{tang} \beta_1.$$

Cela substitué dans (162) donne

$$164. \qquad S_1 = L_1\left(\frac{\Delta^2 \lambda}{D} + \frac{n Q}{\sigma}\right) + h_1 \frac{Q}{\sigma} \text{ pour la distance } L_1.$$

Dans cette expression h_1 est *positif,* si la voie L_1 *monte, zéro* si elle est *horizontale,* et *négatif* si elle *descend;* mais la formule n'est applicable qu'aux cas où

$$165. \qquad \operatorname{tang} \beta_1 > -n.$$

E. Car si β_1 est *négatif* et $\operatorname{tang} \beta_1 = -n$, la *gravité* seule conserve au train son mouvement avec la vitesse qu'il avait sur le sommet de la pente. On se gardera donc bien, dans ce cas, de laisser consommer par la machine, de l'air dont la force peut être produite ici par la gravité seule. Donc on a $S = 0$ pour $\operatorname{tang} \beta = -n$.

La formule (162) ne *donne pas* ce résultat, si l'on y fait $\operatorname{tang} \beta = -n$. La raison en est que le calcul ci-dessus suppose que la machine doit *toujours* puiser de l'air du réservoir, quelle que soit la pente β. Mais pour $\operatorname{tang} \beta = -n$ *aucune* force n'est nécessaire aux pistons des cylindres, parceque alors le train est déjà poussé par la gravité seule. Donc la tension qu'il faut dans ce cas à l'air introduit dans les cylindres, est seulement $= 1$, et μ est $= 0$. Et comme la machine consomme toujours quatre cylindres d'air pendant une révolution des roues de propulsion, la consommation d'air est ici $\pi \Delta^2 \lambda$ pour une

révolution, et $\frac{L}{\pi D}\cdot\pi\Delta^2\lambda = \frac{L\Delta^2\lambda}{D}$ pour la distance L; et c'est effectivement ce que donne la formule (162) pour $\text{tang}\beta = -n$; donc cette formule n'est pas en défaut. Mais on ***ne fera*** tirer par la machine de l'air du réservoir qu'autant, qu'elle en aura besoin: on fermera par le robinet décrit ci-dessus le passage du réservoir aux cylindres. Donc on obtient dans le cas de $\text{tang}\beta = -n$ non pas la valeur de S que donne la formule (162), mais

166. $S = 0$ pour $\text{tang}\beta = -n$.

F. Si β est ***négatif*** et $\text{tang}\,n < -n$, la gravité seule imprime encore au train son mouvement, mais maintenant elle produit un ***excédant*** de force au dessus de la résistance du train, et c'est ici le cas mentionné (§. 33) où la machine peut tirer de l'air ***de l'atmosphère,*** et le comprimer dans un réservoir pendant sa course même. Elle tirera de l'atmosphère quatre cylindres d'air à chaque tour des roues de propulsion, c'est-à-dire $\pi\Delta^2 l$ mèt. cubes d'air pour le trajet πD, et

167. $S = \frac{L_1}{\pi D}\cdot\pi\Delta^2\lambda = L_1\frac{\Delta^2\lambda}{D}$ mèt. cub. d'air

pendant que la train parcourt la distance L_1. C'est air est comprimé par la machine pendant sa course. Il faut donc écrire ici non seulement $S = 0$, comme pour $\text{tang}\beta = -n$, mais

168. $S_1 = -\frac{\Delta^2\lambda}{D}$ pour $\text{tang}\beta < -n$,

si l'on veut tenir compte de ce cas dans le calcul de la consommation d'air par la machine.

G. La formule générale (164) n'est donc applicable sans modifications, qu'aux cas où $\text{tang}\beta > -n$, soit que la voie monte, ou qu'elle descende devant le train; car dans ces cas seulement, une consommation d'air du grand réservoir aura lieu. La formule donne cette consommation pour chaque portion de la route d'une pente invariable β. Donc si l'on désigne par L_1 la *somme* des longueurs de toutes les portions de la voie dont les pentes ne sont pas moindres que $-n$, et par H_1 la ***somme algébrique*** des hauteurs h_1 montées ou descendues par ces parties de la voie, la formule donne pour la consommation totale d'air sur toutes ces parties de la voie:

169. $S_1 = L_1\left(\frac{\Delta^2\lambda}{D} + \frac{nQ}{\sigma}\right) + H_1\frac{Q}{\sigma}$.

Pour toutes les parties de la voie où $\text{tang}\beta = -n$, et dont la longueur totale doit être désignée par L_2, on a

$$170. \quad S_2 = 0.$$

Pour les portions de la voie enfin, où $\text{tang}\beta < -n$, et dont nous désignerons la longueur totale par L_3, on a

$$171. \quad S_3 = -L_3 \frac{\Delta^2 \lambda}{D}.$$

Donc la consommation totale d'air, tiré du réservoir, que nous exprimerons par S, est

$$172. \quad S = S_1 + S_2 + S_3 = L_1\left(\frac{\Delta^2 \lambda}{D} + \frac{nQ}{\sigma}\right) + H_1 \frac{Q}{\sigma} - L_3 \frac{\Delta^2 \lambda}{D}.$$

En désignant par L la longueur *totale* de la voie, de sorte que

$$173. \quad L = L_1 + L_2 + L_3,$$

on a aussi $L_1 = L - L_2 - L_3$, et (172) donne

$$174. \quad S = (L - L_2 - 2L_3)\frac{\Delta^2 \lambda}{D} + (L - L_2 - L_3)\frac{nQ}{\sigma} + H_1 \frac{Q}{\sigma}.$$

36.

A cette consommation d'air du grand réservoir, il faut ajouter encore celle qui est nécessaire par ***engendrer*** la vitesse de la course.

A. Comme on désirera toujours produire la vitesse demandée aussi ***promptement*** que possible, on y employera la ***plus grande*** tension de l'air comprimé dont on peut disposer, et par conséquent la tension μ qui est nécessaire à l'air pour faire gravir au train la ***plus forte*** pente de la voie. Et suivant (§. 29), on fera agir cette pression sans la diminuer, jusqu'à ce que la vitesse demandée soit produite.

B. La force qui agit perpendiculairement sur le bras de la manivelle est suivant (144 et 145)

$$175. \begin{cases} 1. \quad q_1 = p\left(\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{y\,\partial y}{\partial s\sqrt{(a^2 - y^2)}}\right) \text{ pour le demi-cercle } \textbf{\textit{supérieur AMD}} \text{ et} \\ 2. \quad q_2 = p\left(\dfrac{\partial x}{\partial s} - \dfrac{y\,\partial y}{\partial s\sqrt{(a^2 - y^2)}}\right) \text{ pour le demi-cercle } \textbf{\textit{inférieur DQA}}. \end{cases}$$

Ayant déduit de ces forces celle $Z \cdot \frac{D}{2r} = Z \cdot \frac{D}{\lambda}$ qui est nécessaire au bras de la manivelle pour la résistance Z du train des wagons sur les rails, c'est-à-dire pour maintenir au mouvement du train une vitesse ***constante,*** qui même peut être zéro, on aura l'excédant de force de la machine qui doit être destiné à ***engendrer la vitesse.*** Donc si au lieu de la force totale de

la machine, comme en (175), on désigne par q_1 et q_2 *l'excédant* de force, dont nous venons de parler, on aura

$$176.\quad \begin{cases} 1.\quad q_1 = p\left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y\,\partial y}{\partial s\sqrt{(a^2-y^2)}}\right) - \frac{ZD}{\lambda} \text{ pour le demi-cercle } \textit{supérieur} \text{ et} \\ 2.\quad q_2 = p\left(\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{y\,\partial y}{\partial s\sqrt{(a^2-y^2)}}\right) - \frac{ZD}{\lambda} \text{ pour le demi-cercle } \textit{inférieur}. \end{cases}$$

C. Ces forces *motrices*, que nous désignerons pour un moment indifféremment par q, agissent sur la masse Q et produisent une force *accélératrice* $\frac{q}{Q}$. Cette force produit dans le temps ∂t la vitesse

$$177.\quad \partial v = 2g\frac{q}{Q}\partial t.$$

Elle fait parcourir l'extrémité du bras de la manivelle, sur laquelle elle agit, pendant le temps ∂t la distance

$$178.\quad \partial s = v\,\partial t,$$

ce bras ayant la vitesse v, donc on a

$$179.\quad \partial t = \frac{\partial s}{v},$$

et cela, substitué dans (177), donne $\partial v = 2g\cdot\frac{q}{Q}\cdot\frac{\partial s}{v}$ et par conséquent

$$180.\quad q\,\partial s = \frac{Q}{2g}v\,\partial v.$$

Si dans (180), on substitue les deux valeurs q_1 et q_2 de q (176), on obtient

$$181.\quad \begin{cases} 1.\ p\left(\partial x + \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}\right) - \frac{ZD}{\lambda}\cdot\partial s = \frac{Q}{2g}v\partial v \text{ pour le demi-cercle } \textit{supérieur} \text{ et} \\ 2.\ p\left(\partial x - \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}\right) - \frac{ZD}{\lambda}\cdot\partial s = \frac{Q}{2g}v\partial v \text{ pour le demi-cercle } \textit{inférieur}. \end{cases}$$

Les intégrales de ces expressions doivent être prises pour m tours de la manivelle ou des roues de propulsion, si l'on veut que la vitesse v demandée soit engendrée pendant ces m révolutions.

D. Désignant par X, Y et U les intégrales de $p\,\partial x$, $\frac{py\,\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ et $\frac{ZD}{\lambda}\partial s$, et par C une constante, (181) donne

$$182.\quad \begin{cases} 1.\quad X + Y - U = \frac{Q}{4g}v^2 + C \text{ pour le demi-cercle } \textit{supérieur} \text{ et} \\ 2.\quad X - Y - U = \frac{Q}{4g}v^2 + C \text{ pour le demi-cercle } \textit{inférieur}. \end{cases}$$

Si l'on suppose $X = X_0$ pour $x = 0$, $X = X_1$ pour $x = AP$, et $X = X_2$ pour $x = AD$, X est aussi $= X_0$ pour le point D, $= X_1$ pour $x = DP_1$, et $= X_2$ pour $x = DA$. Si l'on suppose $Y = Y_0$ pour $x = 0$,

$Y = Y_1$ pour $x = AP$, et $Y = Y_2$ pour $x = AD$, on a pareillement $Y = Y_0$ pour le point D, $Y = Y_1$ pour $x = DP_1$ et $Y = Y_2$ pour $x = DA$. Supposons encore $U = U_0$ et $v = v_0$ pour le point A, $U = U_1$ et $v = v_1$ pour le point M, $U = U_2$ et $v = v_2$ pour le point D, $U = U_3$ et $v = v_3$ pour le point Q, et $U = U_4$ et $v = v_4$ pour le point A où la manivelle est arrivée après une révolution ***entière.***

α. Cela posé, on obtient d'abord en vertu de (182, 1) pour le point A:

$$183. \quad X_0 + Y_0 - U_0 = \frac{Q}{4g} v_0^2 + C, \quad \text{donc} \quad C = X_0 + Y_0 - U_0 - \frac{Q}{4g} v_0^2,$$

et cela, substitué dans (182, 1), donne pour le moment de A en M:

$$184. \quad X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 - U_1 + U_0 = \frac{Q}{4g}(v_1^2 - v_0^2).$$

β. Pour le point M (182, 1) donne

$$185. \quad X_1 + Y_1 - U_1 = \frac{Q}{4g} v_1^2 + C, \quad \text{donc} \quad C = X_1 + Y_1 - U_1 - \frac{Q}{4g} v_1^2,$$

et cela, substitué dans (182, 1), donne pour le mouvement de M jusqu'à D:

$$186. \quad X_2 - X_1 + Y_2 - Y_1 - U_2 + U_1 = \frac{Q}{4g}(v_2^2 - v_1^2).$$

γ. Pour le point D (182, 2) donne

$$187. \quad X_0 - Y_0 - U_2 = \frac{Q}{4g} v_2^2 + C, \quad \text{donc} \quad C = X_0 - Y_0 - U_2 - \frac{Q}{4g} v_2^2,$$

et cela, substitué dans (182, 2), donne pour le mouvement de D jusqu'à Q:

$$188. \quad X_1 - X_0 - Y_1 + Y_0 - U_3 + U_2 = \frac{Q}{4g}(v_3^2 - v_2^2).$$

δ. Enfin pour le point A (182, 2) donne

$$189. \quad X_1 - Y_1 - U_3 = \frac{Q}{4g} v_3^2 + C, \quad \text{donc} \quad C = X_1 - Y_1 - U_3 - \frac{Q}{4g} v_3^2,$$

et cela, substitué dans (182, 2), donne pour le mouvement de Q jusqu'à A:

$$190. \quad X_2 - X_1 - Y_2 + Y_1 - U_4 + U_3 = \frac{Q}{4g}(v_4^2 - v_3^2).$$

E. En prenant *la somme* des quatre équations (184, 186, 188 et 190) on obtient

$$191. \quad 2(X_2 - X_0) - U_4 + U_0 = \frac{Q}{4g}(v_4^2 - v_0^2).$$

Si l'on avait supposé

$$192. \quad \begin{cases} v = v_0, v_1, v_2, v_3 \text{ et } v_4, \\ \text{non pas dans les points } A, M, D, Q \text{ et } A, \\ \text{mais dans les points } M, D, Q, A \text{ et } M, \end{cases}$$

on aurait eu les expressions

$$193.\quad \begin{cases} 1. & X_2 - X_1 + Y_2 - Y_1 - U_2 + U_1 = \frac{Q}{4g}(v_1^2 - v_0^2), \\ 2. & X_1 - X_0 - Y_1 + Y_0 - U_1 + U_0 = \frac{Q}{4g}(v_2^2 - v_1^2), \\ 3. & X_2 - X_1 - Y_2 + Y_1 - U_3 + U_2 = \frac{Q}{4g}(v_3^2 - v_2^2), \\ 4. & X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 - U_4 + U_3 = \frac{Q}{4g}(v_4^2 - v_3^2), \end{cases}$$

au lieu de celles (186, 188, 190 et 184). La *somme* des équations (193) est

$$194.\quad 2(X_2 - X_0) - U_4 + U_0 = \frac{Q}{4g}(v_4^2 - v_0^2).$$

Elle est, comme on le voit, *parfaitement égale* à la somme (191) des quatre équations (184, 186, 188 et 190): donc $\frac{Q}{4g}(v_4^2 - v_0^2)$ a toujours *la même valeur,* quel que soit le point où le mouvement *commence.* De là on conclura que les deux manivelles, quoique en angle droit l'une contre l'autre, produisent chacune *la même* accélération du mouvement. Par conséquent la force d'un des deux cylindres peut être considérée comme agissant sur la *moitie* de la masse Q, et la force totale p des deux cylindres comme agissant indifféremment sur la masse totale Q.

F. Les valeurs de X_2 et X_0 sont les mêmes pour la *seconde* révolution des roues de propulsion et pour toutes les *suivantes.* Donc si l'on désigne par $v_{m,4}$ la vitesse acquise par l'extrémité du bras de la manivelle après m révolutions de la manivelle, la formule (191 ou 194) donnera successivement:

$$195.\quad \begin{cases} 2(X_2 - X_0) = \frac{Q}{4g}(v_4^2 - v_0^2) + U_4 - U_0, \\ 2(X_2 - X_0) = \frac{Q}{4g}(v_8^2 - v_4^2) + U_8 - U_4, \\ 2(X_2 - X_0) = \frac{Q}{4g}(v_{12}^2 - v_8^2) + U_{12} - U_8, \\ \cdots\cdots\cdots\

En supposant que le mouvement commence avec la vitesse zéro, de sorte que $v_0 = 0$, et en désignant la vitesse engendrée après m révolutions de la manivelle simplement par v, de sorte que $v_{m,4} = v$, la formule (196) donne

$$197. \quad 2m(X_2 - X_0) = \frac{Qv^2}{4g} + U_{m,4} - U_0.$$

G. ∂U était $= + \frac{ZD}{\lambda} \partial s$ (*D.*), donc on a

$$198. \quad U = \frac{ZD}{\lambda} s + \text{const.},$$

où const. est zéro, U, c'est-à-dire U_0, étant $= 0$ pour $s = 0$. Après m révolutions de la manivelle s est $= m\pi\lambda$, donc (198) donne

$$U_{m,4} = \frac{ZD}{\lambda} \cdot m\pi\lambda = m\pi ZD.$$

Cela étant substitué dans (197), on obtient

$$199. \quad 2m(X_2 - X_0) - m\pi ZD = \frac{Qv^2}{4g}.$$

H. La vitesse de l'extrémité du bras de la manivelle étant v, si l'on désigne par c celle de la circonférence des roues de propulsion, ou bien celle du train des wagons, on a

$$200. \quad c = v \cdot \frac{D}{\lambda} \quad \text{et} \quad v = c \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

En désignant par L la distance que le train a parcourue pendant m révolutions des roues de propulsion, on a

$$201. \quad L = m\pi D, \quad \text{donc} \quad m = \frac{L}{\pi D}.$$

En substituant (200 et 201) dans (199), on obtient

$$\frac{2L}{\pi D}(X_2 - X_0) - \frac{L}{\pi D}\pi ZD = \frac{Q}{4g} c^2 \frac{\lambda^2}{D^2},$$

ou bien

$$202. \quad \frac{2LD}{\pi\lambda^2 Q}(X_2 - X_0 - \tfrac{1}{2}\pi ZD) = \frac{c^2}{4g} = H_2,$$

H_2 désignant la hauteur d'où un corps tombé librement acquiert la vitessse c.

L'expression (202) de la vitesse c du train, engendrée par la pression p de l'air comprimé pendant m révolutions des roues de propulsion, ou sur la distance L parcourue par le train, est toujours ***la même, quel que soit p, constant ou variable.***

I. Dans le cas qui nous occupe p est ***constant*** pendant toute la course des pistons, et sa valeur pour les ***deux*** cylindres et pistons de la machine est

$$203. \quad p = \tfrac{1}{2}\pi\Delta^2\mu\sigma \text{ (152)};$$

donc l'intégrale X de $p\,\partial x$ (182) est celle de $\frac{1}{2}\pi\Delta^2\mu\sigma\,\partial x$, c'est-à-dire

$$204. \quad X = \tfrac{1}{2}\pi\Delta^2\mu\sigma x.$$

Cela donne

205. $X_0 = 0$ pour $x = 0$, et $X_2 = \frac{1}{2}\pi\Delta^2\lambda\mu\sigma$ pour $x = AD = \lambda$,

donc l'expression (202) se réduit à $\frac{2LD}{\pi\lambda^2 Q}(\frac{1}{2}\pi\Delta^2\lambda\mu\sigma - \frac{1}{2}\pi ZD) = \frac{c^2}{4g} = H_2$, ou bien à

$$206. \quad \frac{LD}{\lambda^2 Q}(\Delta^2\lambda\mu\sigma - ZD) = \frac{c^2}{4g} = H_2.$$

K. A chaque révolution des roues de propulsion, sont consommés 4 cylindres d'air comprimé, c'est-à-dire $4\cdot\frac{1}{4}\pi\Delta^2\lambda = \pi\Delta^2\lambda$ mèt. cub. d'air ayant la tension $1+\mu$, et par conséquent $(1+\mu)\pi\Delta^2\lambda$ mèt. cub. *d'air atmosphérique.* Donc en désignant par S_4 la masse d'air atmosphérique consommée pendant $m = \frac{L}{\pi D}$ (200) révolutions des roues de propulsion, ou sur la distance L du trajet, on a

$$207. \quad S_4 = \frac{L}{\pi D}(1+\mu)\pi\Delta^2\lambda = (1+\mu)\frac{L\Delta^2\lambda}{D}.$$

De (206) on tire

$$208. \quad L = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\lambda^2 Q}{D(\Delta^2\lambda\mu\sigma - ZD)}.$$

Cela étant substitué dans (207), donne

$$209. \quad S_4 = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\Delta^2\lambda^3 Q(1+\mu)}{D^2(\Delta^2\lambda\mu\sigma - ZD)}.$$

L. Dans l'expression (209), Z signifie la résistance du train *à l'endroit même* de la voie, où la vitesse c doit être engendrée, et μ exprime la tension de l'air comprimé nécessaire pour *la plus forte* pente de la voie. Désignons par Z_m la résistance du train montant sur la *plus forte pente* β_m et par Z celle sur la pente β, où la vitesse est à engendrer, on a

$$210. \quad Z_m = Q(n + \operatorname{tang}\beta_m) \text{ et}$$

$$211. \quad Z = Q(n + \operatorname{tang}\beta).$$

Puis (155) donne pour Z_m,

$$212. \quad Z_m D = \Delta^2\lambda\mu\sigma,$$

et de là on tire

$$213. \quad \mu = \frac{Z_m D}{\Delta^2\lambda\sigma}.$$

Substituant cette expression de μ dans (209) on obtient

$$214. \qquad S_4 = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\Delta^2 \lambda^3 Q\left(1+\frac{Z_m D}{\Delta^2 \lambda \sigma}\right)}{D^2 (Z_m D - Z D)} = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\lambda^2 Q (\Delta^2 \lambda \sigma + Z_m D)}{D^3 \sigma (Z_m - Z)},$$

ou bien, en substituant ici les valeurs de Z_m et Z (210 et 211),

$$215. \qquad S_4 = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\lambda^2 (\Delta^2 \lambda \sigma + QD(n + \operatorname{tang} \beta_m))}{D^3 \sigma (\operatorname{tang} \beta_m - \operatorname{tang} \beta)}$$

$$= \frac{H_2}{\operatorname{tang} \beta_m - \operatorname{tang} \beta} \left[\Delta^2 \frac{\lambda}{D} + \frac{Q}{\sigma} (n + \operatorname{tang} \beta_m)\right] \frac{\lambda^2}{D^2}.$$

Voilà l'expression de la masse S_4 *d'air atmosphérique* que la machine consommera pour engendrer la vitesse c correspondante à la hauteur H_2 de la chûte des corps libres.

M. La longueur a de la bielle n'a ici, comme on le voit, aucune influence sur la valeur de S_4.

N. Si le conducteur du train des wagons règle bien soigneusement et bien exactement l'introduction de l'air comprimé dans les cylindres de la locomotive, de manière que la vitesse du train ne diminue jamais, pas même dans les cas où la machine tire de l'air de l'atmosphère et le comprime dans le petit réservoir pendant sa course, la consommation S_4 (215), comme il est évident, suffira pour *tout le trajet.* Mais aussi dans les cas où la vitesse aurait diminué, la reproduction de la vitesse totale ne nécessiterait pas encore un surplus de consommation: car la même masse d'air que la *reproduction* de la vitesse exige, à été épargnée *pendant* sa diminution. A la rigueur la consommation S_4, destinée à engendrer la vitesse, ne serait même pas un supplément à ajouter à celle qui est nécessaire pour la traction seule, dans le cas où l'on voudrait laisser diminuer la vitesse peu-à-peu jusqu'à zéro vers la *fin* du trajet; car alors on épargnerait par là, la même masse d'air qu'on aura dépensée au *commencement* du trajet pour engendrer la vitesse. Cependant dans la pratique on ne pourra pas compter sur un telle compensation. Au contraire, des suppléments de consommation seront inévitables dans les cas, où l'on aura été forcé d'enrayer les wagons. Ces suppléments ne peuvent pas être calculés généralement. Ils dépendent de la localité et doivent être arbitrés dans chaque cas particulier. Toutefois nous porterons ici en compte comme *supplément*, toute la masse d'air S_4 trouvée ci-dessus.

37.

A. Nous ajouterons donc encore S_4 (215) à la consommation d'air calculée (174). Cela donne pour la consommation *totale* d'air, qui sera nécessaire,

$$216.\quad S = (L - L_2 - 2L_3)\frac{\Delta^2 \lambda}{D} + [(L - L_2 - 2L_3)n + H_1]\frac{Q}{\sigma} + \frac{H_2}{\operatorname{tang}\beta_m - \operatorname{tang}\beta}\cdot\frac{\lambda^2}{D^2}\left(\Delta^2\frac{\lambda}{D} + \frac{Q}{\sigma}(n + \operatorname{tang}\beta_m)\right).$$

217.
- L est ici la longueur totale de la voie;
- L_2 la longueur totale des parties de la voie, où $\operatorname{tang}\beta = -n$;
- L_3 celle des parties de la voie, où $\operatorname{tang}\beta < -n$;
- H_1 la somme algébrique des hauteurs des pentes $\operatorname{tang}\beta > -n$;
- H_2 est $= \frac{c^2}{4g}$ et c la vitesse voulue de la course;
- n est $= 0{,}004$ (128), et $\sigma = 9418$ kilogr. (15);
- Δ est le diamètre des cylindres de la locomotive,
- λ la longueur des cylindres,
- D le diamètre des roues de propulsion;
- β_m est la ***plus forte*** pente de la voie, et
- β la pente à l'endroit où la vitesse c doit être engendrée.

B. Comme (156) donne

$$218.\quad \frac{\Delta^2 \lambda}{D} = \frac{Q}{\mu_m \sigma}(n + \operatorname{tang}\beta_m),$$

l'expression de S (216), si l'on y introduit celle (209) de S_4, peut aussi être présentée sous la forme

$$219.\quad S = \left[(L_1 - L_2 - 2L_3)\frac{n + \operatorname{tang}\beta_m}{\mu_m} + (L - L_2 - L_3)n + H_1\right]\frac{Q}{\sigma} + H_2\frac{\Delta^2 \lambda^3 Q(1 + \mu_m)}{D^2(\Delta^2 \lambda \mu_m \sigma - ZD)},$$

et cela fait voir que la consommation d'air nécessaire sera d'autant ***moindre*** que la tension μ_m à laquelle on aura comprimé l'air dans le réservoir, sera ***plus grande.*** D'autre part, (216) fait voir que la consommation d'air sera d'autant ***moindre*** que les cylindres seront plus petits, et que les roues de propulsion seront ***plus grandes.***

C. Il est à remarquer qu'il sera toujours bon de tenir compte encore d'un supplément à S, par exemple, de 10 pour cent, non seulement pour les cas où le train est à enrayer en route, mais aussi pour être à même de trans-

porter un petit excédant de charge des wagons, si par hazard cela était nécessaire. Cet excédant n'est pas d'ailleurs toujours perdu, ou consommé réellement; au contraire il reste dans le réservoir pour servir à la course prochaine, dans le cas, où la masse d'air S *normale* a suffi. Il faut seulement, le cas échéant, que l'excédant soit *disponible.*

D. Exemple. Je prendrai un chemin de fer existant, pour y appliquer les formules ci-dessus, et je choisirai celui entre Berlin et Potsdam, le plus ancien de la Prusse, et qui m'est le plus connu, pour l'avoir projeté et exécuté moi-même.

Ce chemin de fer a une longueur de 26363 mètres, donc L est ici $= 26363$. *Toutes* les pentes de cette voie sont *plus faibles* que $n = 0{,}004$; la plus forte pente n'est que de $\beta = 0{,}003\frac{1}{3}$, donc on a ici $\operatorname{tang}\beta_m = 0{,}003\frac{1}{3}$ et L_2 et L_3 sont zéro. La voie est *horizontale* aux deux extrémités, donc $\beta = 0$. L'extrémité de la voie à Potsdam est de 2,2 mètres au dessus de celle de Berlin, donc on a $H_1 = +2{,}2$ pour le trajet de Berlin à Potsdam, et $H_1 = -2{,}2$ pour le retour.

Supposons une locomotive à air dont les cylindres de propulsion ont un diamètre de $23\frac{1}{2}$ centim. et une longueur de $31\frac{1}{3}$ centim. et les roues de propulsion un diamètre de 1,57 mètres, nous aurons $\Delta = 0{,}235$, $\lambda = 0{,}313\ldots$ et $D = 1{,}57$ mètres. Supposons que le poids du train, que la machine doit transporter avec une vitesse de 12,5 mètres par seconde (6 milles de Prusse par heure) soit 92770 kilogr. (1800 quintaux de Prusse), y compris son propre poids. A la vérité la vitesse, avec laquelle on marche ordinairement sur ce chemin de fer, n'est que d'environ 9 mètres par seconde, mais il faut qu'une plus grande vitesse soit au moins *possible.*

Cela posé, on a $H_2 = \frac{c^2}{4g} = 7{,}78$ mèt. et la formule (157) donne

220. $\mu_m = 6{,}52$;

donc il faut que l'air soit ici comprimé dans le grand réservoir à une tension de 6,52 atm.

Puis (219) donne

221. $S = 1359$ mèt. cub. d'air atm. pour le trajet de Berlin à Potsdam et

222. $S = 1347$ mèt. cub. d'air atm. pour le trajet de Potsdam à Berlin.

c. Des pentes les plus avantageuses de la voie pour une locomotive à air de première sorte.

38.

Comme une locomotive à air ne consomme aucun air comprimé sur les pentes $\text{tang}\beta = -n$, et qu'elle tire même de l'air de l'atmosphère et le comprime sur les pentes $\text{tang}\beta < -n$, tandis qu'il lui faut toujours de l'air comprimé sur toutes les pentes $\text{tang}\beta > -n$, même en les *descendant*, il se présente ici la question de savoir si, selon les circonstances, des pentes plus fortes ne seraient peut-être pas plus avantageuses que des pentes plus faibles, en ayant égard, comme cela doit être, non seulement à la course d'un train en allant, mais aussi à son *retour:* car si une pente est plus faible que $\text{tang}\beta = n$, il faut que la locomotive tire de l'air comprimé du réservoir, non seulement en *montant* cette pente, mais encore en la *descendant:* si au contraire la pente est plus forte que $\text{tang}\beta = n$, elle ne tire de l'air du réservoir qu'en *montant* la pente, tandis qu'elle ne consomme non seulement aucun air en *descendant,* mais qu'elle en gagne encore. Aussi se présente t'il cette autre question, de savoir, si au lieu de donner à la voie une pente *constante* pour gravir une hauteur sur une longueur déterminée, il ne serait pas plus avantageux de donner à une *partie* de la voie une pente plus *faible*, et au *reste* de la longueur une pente plus *forte*. Nous aurons à discuter ces questions d'une manière générale et en ayant égard aux différentes circonstances qui peuvent se présenter; car si la solution de ces questions était affirmative, cela serait très-important, parcequ'alors dans les projets des chemins de fer, on pourrait suivre beaucoup plus la surface du terrain, et éviter par là de grandes dépenses.

La hauteur à gravir sur la longueur L de la route soit $= h$. Au lieu de $\text{tang}\beta$ nous écrirons pour abréger seulement β. Alors on a

$$223. \qquad L\beta = h.$$

Si la distance L est partagée en deux parties L_1 et L_2, l'une ayant la pente β_1, l'autre la pente β_2, on a pareillement

$$224. \qquad L_1\beta_1 = h_1 \quad \text{et} \quad L_2\beta_2 = h_2,$$

tandis que

$$225. \qquad L\beta = L_1\beta_1 + L_2\beta_2 = h = h_1 + h_2 \quad \text{et}$$
$$226. \qquad L = L_1 + L_2.$$

Soit Q_1 le poids du train pour la course *en allant*, et Q_2 celui pour le *retour*, et supposons pour abréger

227. $\frac{Q_2}{\sigma} = k_1$, $\frac{Q_2}{\sigma} = k_2$ et dans (169, 170 et 171),

228. $\frac{\Delta^2 \lambda}{D} = \eta$.

Soit A la masse d'air que consomme la locomotive sur le parcours de toute la ligne L *en allant,* et B celle pour le *retour;* et soient A_1, B_1; A_2, B_2 ces mêmes masses d'air pour les deux *parties* L_1 et L_2 de la ligne. Soit enfin

229. $A + B = C$,

230. $A_1 + B_1 = C_1$, $A_2 + B_2 = C_2$,

231. $C - (C_1 + C_2) = \Sigma$.

Alors Σ exprimera l'épargne obtenue sur la consommation d'air qui peut-être aura lieu, en donnant à la voie L deux pentes différentes au lieu d'une pente *constante.*

39.

Discutons en premier lieu la question, si pour une longueur déterminée une plus forte pente est plus avantageuse qu'une pente plus faible.

A. Ici la pente β peut être supposée toujours *positive,* et elle peut être $= 0$, $< n$, $= n$ et $> n$. Pour ces différents cas, les formules trouvées ci-dessus donnent

232.
$$\begin{cases} 1.\ A = L(\eta + nk_1)\ (169), & B = L(\eta + nk_2)\ (169) & \text{pour } \beta = 0, \\ 2.\ A = L(\eta + nk_1) + L\beta k_1\ (169), & B = L(\eta + nk_2) - L\beta k_2 & \text{pour } \beta < n, \\ 3.\ A = L(\eta + nk_1) + Lnk_1\ (169), & B = 0 & \text{pour } \beta = n, \\ 4.\ A = L(\eta + nk_1) + L\beta k_1\ (169), & B = -L\eta & \text{pour } \beta > n. \end{cases}$$

De là on tire, $A + B$ étant $= C$ (229),

233.
$$\begin{cases} 1.\ C = L(2\eta + n(k_1 + k_2)) & \text{pour } \beta = 0; \\ 2.\ C = L(2\eta + n(k_1 + k_2) + \beta(k_1 - k_2) & \text{pour } \beta < n; \\ 3.\ C = L(\eta + 2nk_1) & \text{pour } \beta = n; \\ 4.\ C = Lk_1 + (n + \beta) & \text{pour } \beta > n. \end{cases}$$

B. Si les charges des wagons sont égales en allant et en revenant, on a

234. $k_1 = k_2 = k$,

et (233.) donne

235.
$$\begin{cases} 1.\ C = 2L(\eta + nk) & \text{pour } \beta = 0, \\ 2.\ C = 2L(\eta + nk) & \text{pour } \beta < n, \\ 3.\ C = L(\eta + 2nk) & \text{pour } \beta = n, \\ 4.\ C = Lk(n + \beta) & \text{pour } \beta > n. \end{cases}$$

C. Si des voitures chargées ***montent*** seulement la pente et reviennent vides; où alors le poids du train retournant n'est qu'environ ***le tiers*** de celui du train chargé, on a

$$236. \quad k_2 = \tfrac{1}{3} k_1,$$

et (233) donne

$$237. \quad \begin{cases} 1. & C = L(2\eta + \frac{4}{3} n k_1) & \text{pour } \beta = 0, \\ 2. & C = L(2\eta + \frac{2}{3}(2n+\beta) k_1) & \text{pour } \beta < n, \\ 3. & C = L(\eta + 2nk_1) & \text{pour } \beta = n, \\ 4. & C = Lk_1(n+\beta) & \text{pour } \beta > n. \end{cases}$$

D. Ces formules présentent déjà des conséquences remarquables. Par ex. (235) fait voir que dans les cas d'égalité de la charge des wagons en allant et en revenant, qui est le cas le plus ordinaire, la consommation d'air comprimé est ***la même*** sur une voie ***horizontale*** et sur une pente moindre que $n = \frac{1}{250} = 0{,}004$. Elle est même ***moindre*** de $L\eta$ sur une pente de $n = 0{,}004$ juste, que sur une route horizontale. Supposant que la valeur de C (235, 1) doive être ***égale*** à celle de C (235, 4), on en tire $2(\eta + nk) = k(n+\beta)$ et

$$238. \quad \beta = n + \frac{2\eta}{k}:$$

donc la pente de la voie peut même ***dépasser*** n de $\frac{2\eta}{k}$, sans que la consommation d'air sur cette pente soit plus considérable que sur une voie ***horizontale.***

Il s'en suit que, si l'on veut se servir des locomotives à air, il n'est nullement nécessaire de faire sur un terrain un peu accidenté de profondes tranchées et de gros remblais pour gagner par ce moyen des pentes aussi faibles que possible: une pente de 0,004 est même ***plus avantageuse*** que la situation ***horizontale*** de la voie, et même encore une pente de $n + \frac{2\eta}{k}$ n'exige pas plus de force motrice que la voie horizontale. Tout cela peut offrir de grandes économies.

E. Supposons par ex. une voie de 1255 mèt. de longueur. Le poids du train soit comme ci-dessus 92770 kilogr., et les dimensions de la locomotive comme ci-dessus $\Delta = 0{,}235$, $\lambda = 0{,}313$, $D = 1{,}57$ mèt. Alors on a

$$239. \quad L = 1255, \quad Q = 92770, \quad \frac{Q}{\sigma} = k = 9{,}85, \quad \eta = 0{,}011, \quad n = 0{,}004.$$

Ces valeurs de L, Q, k, η étant substituées dans (235 et 237) donnent

		Dans le cas où le poids du train est le même à l'aller et au retour.	Dans le cas où la pente n'est descendue que par des wagons vides.	
240.	1.	$C = 126{,}75$ mèt. cub.,	97,11 mèt. cub.	si la voie est ***horizontale,***
	2.	$C = 126{,}75$ - - ,	121,25 - -	si elle monte d'un $300^{\text{ième}}$,
	3.	$C = 112{,}84$ - - ,	112,84 - -	si elle monte d'un $250^{\text{ième}}$,
	4.	$C = 126{,}75$ - - ,	126,75 - -	si elle monte d'un $160^{\text{ième}}$.

Donc sur une pente de 1 sur 160, qui déjà est assez considérable, la force nécessaire à la locomotive ne dépasse pas encore celle qu'il lui faut sur une voie horizontale, dans le cas où les charges des wagons sont les mêmes dans les deux directions opposées du trajet, et une hauteur de $\frac{1255}{160} = 7{,}85$ peut être gravie sans la moindre tranchée, ni le moindre remblai. Si l'on donne à la voie une pente de 1 sur 250 la force motrice nécessaire sera même ***moindre*** de 13,91 mèt. cub. d'air que celle dont on aurait besoin si la voie était horizontale; donc on épargnerait ici 13,91 mèt. cub. d'air ou 11 pour cent de la force motrice, et en sus les frais d'une tranchée de $\frac{1255}{250} = 5$ mèt. du profondeur.

40.

Nous abordons la seconde question, savoir, s'il serait plus avantageux de donner par parties deux pentes différentes à une rampe, que de lui donner une pente constante.

A. On ne donnera jamais à la première partie de la rampe, savoir à la plus basse, une pente plus forte qu'il ne faudrait à toute la rampe, parceque dans le cas contraire, on aurait à faire, non pas ***moins*** de déblais et de remblais, mais ***davantage.*** Donc la seconde partie L_2 de la rampe ***montera*** dans tous les cas, et aura une pente ***plus forte*** que β. On aura donc toujours $\beta_2 > 0$. Mais β_1, tandis qu'il est toujours $< \beta$, pourra être également bien ***positif*** et ***négatif;*** la première partie de la rampe pourra ***descendre*** au lieu de ***monter.*** Donc selon que β est $= 0$, $< n$, $= n$ ou $> n$, il existe les cas suivants.

I. Si $\beta = 0$ il se peut qu'on ait

	Pour $\beta_2 > 0 < n$.	Pour $\beta_2 = n$.	Pour $\beta_2 > n$.
241.	1. $\beta_1 < 0 > -n$;	4. $\beta_1 < 0 > -n$;	7. $\beta_1 < 0 > -n$;
	2. $\beta_1 = -n$;	5. $\beta_1 = -n$;	8. $\beta_1 = -n$;
	3. $\beta_1 < -n$.	6. $\beta_1 < -n$.	9. $\beta_1 < -n$.

II. Si $\beta > 0 < n$ il se peut qu'on ait

	Pour $\beta_2 > 0 < n$.	Pour $\beta_2 = n$.	Pour $\beta_2 > n$.
242.	10. $\beta_1 > 0 < n$;	15. $\beta_1 > 0 < n$;	20. $\beta_1 > 0 < n$;
	11. $\beta_1 = 0$;	16. $\beta_1 = 0$;	21. $\beta_1 = 0$;
	12. $\beta_1 < 0 > -n$;	17. $\beta_1 < 0 > -n$;	22. $\beta_1 < 0 > -n$;
	13. $\beta_1 = -n$;	18. $\beta_1 = -n$;	23. $\beta_1 = -n$;
	14. $\beta_1 < -n$.	19. $\beta_1 < -n$.	24. $\beta_1 < -n$.

III. Si $\beta = n$ il se peut qu'on ait

	Pour $\beta_2 > n$.
243.	25. $\beta_1 > 0 < n$;
	26. $\beta_1 = 0$;
	27. $\beta_1 < 0 > -n$;
	28. $\beta_1 = -n$;
	29. $\beta_1 < -n$.

IV. Si $\beta > n$ il se peut qu'on ait

	Pour $\beta_2 > n$.
244.	30. $\beta_1 > n$;
	31. $\beta_1 = n$;
	32. $\beta_1 > 0 < n$;
	33. $\beta_1 = 0$;
	34. $\beta_1 < 0 > -n$;
	35. $\beta_1 = -n$;
	36. $\beta_1 < -n$.

B. Donc pour β_2 il ne se présente que trois cas, tandis que pour β_1 il en existe jusqu'à ***sept.***

Les formules (233, 2, 3, 4) peuvent être appliquées immédiatement aux *trois* cas de β_2, parceque β_2, dans les formules précitées, est toujours *positif*, ainsi que β. Seulement on aura à écrire L_2 à la place de L, et β_2 à la place de β. Donc on a pour le trajet sur la seconde partie L_2 de la rampe dans les deux directions opposées:

245.
$$\begin{cases} 1.\ C_2 = L_2(2\eta + n(k_1+k_2) + \beta_2(k_1-k_2)) & \text{si } \beta_2 > 0 < n, \\ 2.\ C_2 = L_2(\eta + 2nk_1) & \text{si } \beta_2 = n \text{ et} \\ 3.\ C_2 = L_2k_1(n+\beta_2) & \text{si } \beta_2 > n. \end{cases}$$

Les formules (233) donnent également les valeurs de C_1 dans les *sept* cas de β_1. Mais il faut bien remarquer, que dans les cas où la première partie de la rampe ***descend,*** au lieu de ***monter,*** on doit considérer cette partie comme ***ascendante,*** et mettre la charge des wagons de ***retour*** à la place de celle qu'ils avaient en allant, tandis que β_1 prend le signe opposé. Cela posé, on aura

246.
$$\begin{cases} 1. & C_1 = L_1 k_1 (n+\beta_1) \ldots\ldots\ldots & \text{pour} \quad \beta_1 > n, \\ 2. & C_1 = L_1 (\eta + 2nk_1) \ldots\ldots\ldots & \text{pour} \quad \beta_1 = n, \\ 3. & C_1 = L_1 (2\eta + n(k_1+k_2) + \beta_1 (k_1 - k_2)) & \text{pour} \quad \beta_1 > 0 < n, \\ 4. & C_1 = L_1 (2\eta + n(k_1+k_2)) \ldots\ldots & \text{pour} \quad \beta_1 = 0, \\ 5. & C_1 = L_1 (2\eta + n(k_1+k_2) + \beta_2 (k_1 - k_2)) & \text{pour} \quad \beta_1 < 0 > -n, \\ 6. & C_1 = L_1 (\eta + 2nk_2) \ldots\ldots\ldots & \text{pour} \quad \beta_1 = -n, \\ 7. & C_1 = L_1 k_2 (n - \beta_1) \ldots\ldots\ldots & \text{pour} \quad \beta < -n. \end{cases}$$

En déduisant les valeurs de C_1 et C_2 de celle du C correspondante (233), on obtiendra Σ (231). Mais comme nous avons déjà vu en (§. 39), que les cas les plus avantageux sont ceux où la pente de la voie est $= n$ ou $> n$, nous ne discuterons ici (pour épargner l'espace), que quelques uns des cas où, pour les différentes grandeurs de β, les pentes β_1 et β_2 sont ou $= \pm n$ ou $> +n$ ou $< -n$, spécialement les cas N°. 5, 6, 9, 18, 28 et 31.

C. Mais avant d'entrer en matière, il s'agit encore des relations qu'ont L, L_1 et L_2 entre elles, pour des valeurs données de β, β_1 et β_2. Ces relations se trouveront au moyen des formules (225 et 226). On obtient par (225 et 226)

247. $$L\beta = L_1\beta_1 + (L - L_1)\beta_2 \quad \text{et} \quad L\beta = (L - L_2)\beta_1 + L_2\beta_2,$$

et delà on tire

248. $$L_1 = L \cdot \frac{\beta_2 - \beta}{\beta_2 - \beta_1} \quad \text{et} \quad L_2 = L \cdot \frac{\beta - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

D. a. Cas N°. 5, où $\beta = 0$, $\beta_1 = -n$ *et* $\beta_2 = +n$.

Dans ce cas on a

249.
$$\begin{cases} 1. & C = L(2\eta + n(k_1+k_2)) \ (233, 1), \\ 2. & C_1 = L_1(\eta + 2nk_2) \ (246, 6), \\ 3. & C_2 = L_2(\eta + 2nk_1) \ (245, 2), \end{cases}$$

donc en vertu de (231) on a

$$\Sigma = 2L\eta - (L_1 + L_2)\eta + Ln(k_1+k_2) - 2n(L_1k_2 + L_2k_1)$$

ou bien en vertu de (226),

$$\Sigma = L\eta + Ln(k_1+k_2) - 2n(L_1k_2 + L_2k_1),$$

ou bien aussi, L_1 étant ici suivant (248), $= L \cdot \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}L$ et $L_2 = L \cdot \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}L$,

250. $$\Sigma = L\eta.$$

Donc si au lieu de donner à la voie L une position *horizontale*, on fait *descendre* la moitié de sa longueur d'une pente de $n = 0{,}004$ et *monter* l'autre moitié de la même pente, on gagnera $L\eta$ mètres cub. d'air. Cette économie est de 13,01. mèt. cub. dans l'exemple (§. 39. *E.*).

b. Cas N°. 6, où $\beta = 0,\ \beta_1 < -n,\ \beta_2 = +n.$

Dans ce cas, on a

$$251.\quad \begin{cases} 1. & C = L(2\eta + n(k_1 + k_2))\ (233,\ 1), \\ 2. & C_1 = L_1 k_2 (n - \beta_1)\ (246,\ 7), \\ 3. & C_2 = L_2(\eta + 2nk_1)\ (245,\ 2). \end{cases}$$

Cela donne suivant (231)

$\Sigma = 2L\eta + Lnk_1 + Lnk_2 - L_1 nk_2 + L_1\beta_1 k_2 - L_2\eta - 2L_2 nk_1$, ou bien

$\Sigma = \eta(2L - L_2) + (L - 2L_2)nk_1 + (L_2 n + L_1\beta_1)k_2$ ou, puisque ici

$$L_1 = L\frac{n}{n-\beta_1} \text{ et } L_2 = L\cdot\frac{-\beta_1}{n-\beta_1},$$

$$\Sigma = L\eta\left(2 + \frac{\beta_1}{n-\beta_2}\right) + L\left(1 + \frac{2\beta_1}{n-\beta_1}\right) + L\left(\frac{-n\beta_1}{n-\beta_1} + \frac{n\beta_1}{n-\beta_1}\right)k_2,$$

ou bien

$$252.\quad \Sigma = \frac{L}{n-\beta_1}[\eta(2n - \beta_1) + n(n + \beta_1)k_1].$$

Si à cette expression, on donne la forme

$$253.\quad \Sigma = L\left[n\cdot\frac{\eta + 2nk_1}{n-\beta_1} + \eta - nk_1\right],$$

il est visible que Σ est d'autant ***plus grand*** que $n - \beta_1$ et par conséquent la valeur ***absolue*** du β_1 ***négatif*** est ***moindre.*** Il faut donc rendre β_1 aussi peu que possible $< -n$. Si dans l'exemple ci-dessus (§. 39. *E.*) on fait $\beta_1 = -0{,}005$, on obtient

$$254.\quad \begin{cases} \Sigma = 14{,}53 \text{ mèt. cub. d'air et} \\ L_1 = 558 \text{ mèt. et } L_2 = 697 \text{ mèt.} \end{cases}$$

Donc si au lieu de donner à une voie de la longueur de 1255 mèt. une situation ***horizontale,*** on la fait ***descendre*** d'un 200ième sur la longueur de 558 mèt. et ***monter*** d'un 250ième sur le reste de la longueur, on gagnera 14,53 mèt. cub. d'air; ce qui est encore un peu plus que dans le cas précédent (*a*).

c. Cas N°. 9, où $\beta = 0,\ \beta_1 < -n,\ \beta_2 > n.$

Dans ce cas on a

$$255.\quad \begin{cases} 1. & C = L(2\eta + n(k_1 + k_2))\ (233,\ 1), \\ 2. & C_1 = L_1 k_2 (n - \beta_1)\ (246,\ 7), \\ 3. & C_2 = L_2 k_1 (n + \beta_2)\ (245,\ 3). \end{cases}$$

Cela donne suivant (231)

$\Sigma = 2\eta L + Lnk_1 + Lnk_2 - L_1 nk_2 + L_1\beta_1 k_2 - L_2 nk_1 - L_2\beta_2 k$, ou bien

$\Sigma = 2\eta L + L_1 nk_1 + L_2 nk_2 + L_1\beta_1 k_2 - L_2\beta_2 k_1$ ou, puisque ici

$$L_1 = L \cdot \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \text{ et } L_2 = L \cdot \frac{-\beta_1}{\beta_2 - \beta_1},$$

256. $$\Sigma = \frac{L}{\beta_2 - \beta_1}[2\eta(\beta_2 - \beta_1) + nk_1\beta_2 - \beta_1(nk_2 - \beta_2(k_1 + k_2))].$$

En donnant à cette expression la forme

257. $$\Sigma = L\left[\beta_2 \frac{n(k_1 - k_2) + \beta_2(k_1 + k_2)}{\beta_2 - \beta_1} + 2\eta + nk_2 - \beta_2(k_1 + k_2)\right],$$

on voit d'abord que pour toute valeur ***déterminée*** de β_2, Σ est d'autant plus grand, que la valeur ***absolue*** du β_1 ***négatif*** est plus petite. Donc β_1 ne doit être que le moins possible inférieur à n. De l'autre côté, en donnant à (256) la forme

258. $$\Sigma = L\left[\beta_1 \frac{n(k_1 - k_2) + \beta_1(k_1 + k_2)}{\beta_2 - \beta_1} + 2\eta + nk_1 + \beta_1(k_1 + k_2)\right],$$

on voit que Σ pour toute valeur déterminée de β_1 est d'autant plus grand que le β_2 ***positif*** est moindre. Donc il faut que β_2 ne soit que le moins possible supérieur à n.

Si dans l'exemple ci-dessus (§. 39. ***E.***) on fait $\beta_2 = 0{,}005$ et $\beta_1 = -0{,}005$, on obtient

259. $$\Sigma = 15{,}46 \text{ mèt. cub.},$$

ce qui est encore un peu plus que dans le cas précédent (***b***). Pour $\beta_2 = -\beta_1 = 0{,}0045$ on aurait même $\Sigma = 21{,}64$ mèt. cub., ce qui est une économie de 17 pour cent de la force motrice.

d. ***Cas N°. 18, où*** $\beta > 0 < n$, $\beta_1 = -n$, $\beta_2 = n$.

Dans ce cas on a

260.
$$\begin{cases} 1. & C = L(2\eta + n(k_1 + k_2) + \beta(k_1 - k_2)) \ (233, 2), \\ 2. & C_1 = L_1(\eta + 2nk_2) \ (246, 6) \text{ et} \\ 3. & C_2 = L_2(\eta + 2nk_1) \ (245, 2), \end{cases}$$

donc on a ici $\Sigma = L\eta + Ln(k_1 + k_2) + L\beta(k_1 - k_2) - 2n(L_1k_2 + L_2k_1)$, et L_1 étant ici $= L \cdot \frac{n - \beta}{2n}$, et $L_2 = L \cdot \frac{\beta + n}{2n}$,

$$\Sigma = L[\eta + n(k_1 + k_2) + \beta(k_1 - k_2) - ((n - \beta)k_2 + (n + \beta)k_1)],$$

c'est-à-dire

261. $$\Sigma = L\eta.$$

Ce résultat est le même que celui du cas N°. 5. Si par ex. on suppose $\beta = 0{,}003$, on obtient $L_1 = \frac{1}{8}L$ et $L_2 = \frac{7}{8}L$. Donc si au lieu de donner à la voie de 1255 mèt. de longueur une pente constante de 1 sur $333\frac{1}{3}$, on la fait ***descendre*** d'un $250^{\text{ième}}$ sur une première distance de 157 mèt. et ***monter***

ensuite une égale pente sur le reste de la longueur, on gagnera $L\eta = 13{,}91$ mèt. cub. d'air, ou 11 pour cent.

e. Cas N°. 28, où $\beta = n$, $\beta_1 = -n$ et $\beta_2 > n$.

Dans ce cas on a

$$262.\quad \begin{cases} 1. & C = L(\eta + 2nk_1)\ (233,3), \\ 2. & C_1 = L_1(\eta + 2nk_2)\ (246,6), \\ 3. & C_2 = L_2k_1(n+\beta_2)\ (245,3). \end{cases}$$

Cela donne $\Sigma = L(\eta + 2nk_1) - L_1(\eta + 2nk_2) - L_2k_1(n+\beta_2)$, et L_1 étant ici $= L\frac{\beta_2 - n}{\beta_2 + n}$, $L_2 = \frac{n+n}{\beta_2+n}$, on obtient

$$263.\quad \Sigma = 2nL\left[\frac{\eta + 2nk_2}{n+\beta_2} - k_2\right];$$

d'où l'on voit qu'il faut faire k_2 aussi petit que possible.

Pour $\beta_2 = 0{,}005$ on obtient dans l'exemple ci-dessus

$$264.\quad \Sigma = 1{,}37 \text{ mèt. cub. d'air,}$$

de sorte que l'économie est ici peu considérable.

f. Cas N°. 31, où $\beta > n$, $\beta_1 = +n$, $\beta_2 > n$.

Dans ce cas on a

$$265.\quad \begin{cases} 1. & C = Lk_1(n+\beta)\ (233,4), \\ 2. & C_1 = L_1(\eta + 2nk_1)\ (246,2), \\ 3. & C_2 = L_2k_1(n+\beta_2)\ (245,3). \end{cases}$$

Cela donne $\Sigma = Lk_1(n+\beta) - L_1(\eta + 2nk_1) - L_2k_1(n+\beta_2)$, et L_1 étant ici $= L\frac{\beta_2 - \beta}{\beta_2 - n}$, $L_2 = \frac{\beta - n}{\beta_2 - n}$,

$$\Sigma = L\left[k_1(n+\beta) - \frac{(\beta_2-\beta)(\eta+2nk_1) + (\beta-n)(n+\beta_2)k_1}{\beta_2 - n}\right],$$

ou bien

$$266.\quad \Sigma = L\eta\left[\frac{\beta - n}{\beta_2 - n} - 1\right].$$

Comme β_2 doit être toujours plus grand que β, Σ est toujours *négatif;* donc il n'y a pas ici d'économie.

E. Voici le résumé de ces résultats. S'il faut à une voie une pente ***plus forte*** que $n = 0{,}004$, il sera pour le mieux de lui donner cette pente ***constante*** (Cas 31). S'il lui faut une pente ***égale*** à 0,004, on ne gagnera que très-peu si, au lieu de lui donner cette pente dans tous ses points, on la fait d'abord ***descendre*** dès le point le plus bas d'une pente de 0,004, et

monter ensuite d'une pente plus forte sur le reste de la longueur (Cas 28). Mais s'il ne faut à la voie qu'une *faible* pente, et *moindre* que 0,004, ou si elle peut être disposée horizontalement; on économisera 11 jusqu'à 17 pour cent de la force motrice, si on la fait d'abord *descendre* et puis *monter*. Cette économie devient plus considérable par celle à opérer sur les déblais et les remblais.

d. De la faculté des locomotives à air de tirer de l'air de l'atmosphère et de le comprimer pendant leurs courses; et de ses effets sur la modération de la vitesse du train.

41.

Si en descendant des pentes assez roides pour que la gravité y produise une force propulsive plus forte que la résistance des wagons, la machine puise de l'air de l'atmosphère et le comprime dans un petit bassin placé sur la locomotive, l'air progressivement condensé dans ce bassin exercera une force toujours croissante sur les pistons des cylindres de propulsion; car ce ne sont pas alors les pistons qui poussent les wagons, mais au contraire ce sont ceux-ci qui impriment aux pistons leur mouvement de va-et-vient. Donc l'air comprimé dans le petit bassin réagira contre le mouvement du train et diminuera sa vitesse. On peut profiter de cette circonstance pour modérer *arbitrairement* la vitesse du train sur de fortes pentes, par ex. au point que le train arrivé au *pied* de la pente n'ait plus que la même vitesse qu'il avait au *sommet;* ou bien aussi on peut s'en servir pour modérer plus subitement encore la vitesse sur une pente plus faible, ou en montant des rampes. Pour ce dernier but, il n'y aura qu'à tourner le robinet H_1 (§. 33. *E.*), de sorte qu'au lieu de l'air *comprimé* l'air *atmosphérique* puisse entrer dans les cylindres, et à tourner en même temps le robinet H_2, de manière que l'air que les pistons chassent des cylindres ne soit pas conduit dans l'atmosphère, mais dans le petit bassin condenseur. Par cette seule manoeuvre des deux robinets, la force *propulsive* de la machine sera changée subitement en une force *réagissante* qui modérera très-puissamment la vitesse du train. On pourrait aussi faire faire les fonctions du bassin condenseur à l'un des cylindres dont est composé le grand bassin, et si l'on choisissait pour cela un des cylindres dans lesquels l'air comprimé a encore sa plus forte tension, la force réagissante de la machine produite par là, serait plus grande encore. Ce cylindre devrait alors être plus fort et plus solide que les autres.

42.

A. Pour évaluer ces effets des locomotives à air, nous aurons à chercher l'expression générale de la vitesse que le train conserve encore, quand la machine à réagi sur son mouvement de la manière décrite, pendant un temps donné, ou sur une distance déterminée parcourue par le train. De cette expression qui contiendra nécessairement celles du volume du bassin-condenseur et de la distance parcourue, on pourra trouver ce volume et cette distance, si la vitesse est donnée.

B. Le problème est pour le calcul le même que celui (§. 33), où la vitesse produite par la tension de l'air comprimé pendant un parcours déterminé était à chercher, seulement avec la différence que la tension de l'air dans le bassin-condenseur ne *pousse* pas ici les pistons, mais qu'il *s'oppose* à leur mouvement, de sorte que sa force à ici le *signe contraire*. Donc on a ici pour le premier tour de la manivelle la formule

$$267. \qquad -2(X_2 - X_0) - \pi Z D = \frac{Q}{4g}(v_1 - v_0^2),$$

et cette formule prend ici la place de (199). La vitesse de l'extrémité de la manivelle au commencement de sa première révolution est v_0, celle à la fin du tour est v_1. X_0 est l'intégrale X de $p\partial x$ prise pour $x = 0$ ou pour le point A (fig. 18), X_2 est la valeur de cette intégrale pour le point D, et p est la pression de l'air sur les deux pistons de la machine. X et v changent de valeur à chaque tour subséquent de la manivelle.

C. La pression p sur les pistons n'est pas ici constante, comme dans le cas ci-dessus (§. 36): au contraire elle va toujours en *augmentant*, à mesure que peu à peu une plus grande masse d'air entre dans le bassin. Désignons par

268. B le volume du bassin-condenseur

et soit $1+\nu$ atm. la tension de l'air contenu dans ce bassin au départ du train, de sorte qu'il s'y trouve alors $(1+\nu)B$ mèt. cub. *d'air atmosphérique.* A chacun des tours de la manivelle ou des roues de propulsion de la machine, chaque piston parcourt la distance 2λ: par conséquent les deux pistons font entrer $4\lambda \cdot \frac{1}{4}\pi\mathcal{A}^2 = \pi\mathcal{A}^2\lambda$ mèt. cub. d'air dans le bassin pendant *un* tour de la manivelle, et $m\pi\mathcal{A}^2\lambda$ mèt. cub. d'air pendant m tours.

D. Si après m tours, la manivelle poursuit encore son mouvement, et parcourt encore *l'angle* α, de sorte que l'extrémité de l'une des deux manivelles passe de A en M, et celle de l'autre de E en N (l'angle KZN est

supposé ***droit***): l'extrémité S de l'une des deux bielles, et par conséquent l'un des deux pistons, parcourra, comme il est facile de le voir, la distance

269. $u_1 = AP + a(1 - \cos\varphi_1) = x + a - a\cos\varphi,$

l'autre piston la distance

270. $u_2 = ZO + a(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_3) = y + a\cos\varphi_2 - a\cos\varphi_3,$

où φ_1, φ_2, φ_3 expriment les valeurs de l'angle φ pour les points M, E et N. Or on a

271. $a\sin\varphi_1 = y$, $a\sin\varphi_2 = r$, $a\sin\varphi_3 = NO = PZ = r - x$, et par conséquent

272. $a\cos\varphi_1 = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, $a\cos\varphi_2 = \sqrt{(a^2 - r^2)}$, $a\cos\varphi_3 = \sqrt{(a^2 - (r-x)^2)}$,

donc on obtient en vertu de (269 et 270)

273. $\begin{cases} 1. & u_1 = x + a - \sqrt{(a^2 - y^2)} \text{ et} \\ 2. & u_2 = y + \sqrt{(a^2 - r^2)} - \sqrt{(a^2 - (r-x)^2)}. \end{cases}$

L'un des deux pistons introduit $\frac{1}{4}\pi\Delta^2 u_1$ l'autre $\frac{1}{4}\pi\Delta^2 u_1$ mèt. cub. d'air dans le bassin B; donc si les manivelles ont fait m tours et parcouru après encore l'angle α, la totalité de la masse d'air atmosphérique introduit dans le bassin-condenseur est

274. $(1+\nu)B + m\pi\Delta^2\lambda + \frac{1}{4}\pi\Delta^2(u_1+u_2) = (1+\nu)B + \frac{1}{4}\pi\Delta^2(4m_1\lambda + u_1 + u_2).$

E. Cette masse occupe le volume B, donc sa tension est

$$\frac{(1+\nu)B + \frac{1}{4}\pi\Delta^2(4m\lambda + u_1 + u_2)}{B} = 1 + \nu + \frac{\pi\Delta^2}{4B}(4m\lambda + u_1 + u_2),$$

et comme la tension 1 de l'atmosphère résiste aux pistons, la tension ***effective*** agissante sur les pistons est $\nu + \frac{\pi\Delta^2}{4B}(4m\lambda + u_1 + u_2)$. Donc la ***pression*** p exercée sur l'aire $\frac{1}{2}\pi\Delta^2$ des deux pistons est

275. $p = \frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{8B}(4m\lambda + u_1 + u_2) + \frac{1}{2}\nu\pi\Delta^2\sigma.$

Or

276. $p\,\partial x = \partial X,$

donc on obtient en vertu de (275, 276 et 273)

277. $\partial X =$

$$\frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{8B}[4m\lambda + a + x - \nu(a^2 - y^2) + y + \sqrt{(a^2 - r^2)} - \sqrt{(a^2 - (r-x)^2)}]\,\partial x + \frac{1}{2}\nu\pi\Delta^2\sigma\,\partial x.$$

Dans cette formule m est $= 0$ pour le ***premier*** tour de la manivelle, $= 1$ pour le ***second*** etc. Il s'agit maintenant de l'intégrale de la formule (277).

F. *a.* L'intégrale de $(4m\lambda + a + x + \sqrt{(a^2 - r^2)})\,\partial x$ dans (277) est

278. $= (4m\lambda + a + \frac{1}{2}x + \sqrt{(a^2 - r^2)})\,x.$

b. L'intégrale de $y\,\partial x$ dans (277) est l'aire du segment de cercle ***AMP***, et par conséquent

279. $$= \tfrac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{y}{r} - \tfrac{1}{2}(r-x)y = \tfrac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r} - \tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)}.$$

c. Pour la différentielle $\sqrt{(a^2-y^2)}\,\partial x$ on a $y^2 = 2rx - x^2$, et cela donne $y\,\partial y = (r-x)\,\partial x = \sqrt{(r^2-y^2)}\,\partial x$ et $\partial x = \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$, donc on a

280. $$\sqrt{(a^2-y^2)}\,\partial x = y\,\partial y \frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{(r^2-y^2)}}.$$

Supposant $\frac{a^2-y^2}{r^2-y^2} = z^2$, on obtient $y^2 = \frac{r^2z^2-a^2}{z^2-1}$ et $y\,\partial y = \frac{(a^2-r^2)z\,\partial z}{(z^2-1)^2}$ et par conséquent

281. $$\sqrt{(a^2-y^2)}\,\partial x = (a^2-r^2)\frac{z^2\,\partial z}{(z^2-1)^2},$$

et la fraction à droite étant décomposée en quatre autres:

282. $$\frac{4\sqrt{(a^2-y^2)}\,\partial x}{a^2-r^2} = -\frac{z^2\,\partial z}{z-1} + \frac{z^2\,\partial z}{(z-1)^2} + \frac{z^2\,\partial z}{z+1} + \frac{z^2\,\partial z}{(z+1)^2}$$
$$= \frac{(2-z)z^2\,\partial z}{(z-1)^2} + \frac{(2+z)z^2\,\partial z}{(z+1)^2}.$$

Fesant $z-1 = z_1$ et $z+1 = z_2$, cela donne

283. $$\frac{4\sqrt{(a^2-y^2)}\,\partial x}{a^2-r^2} = \left(-z_1 - 1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2}\right)\partial z_1 + \left(z_2 - 1 - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_2^2}\right)\partial z_2;$$

donc l'intégrale de $\sqrt{(a^2-y^2)}\,\partial x$ est

$$= \tfrac{1}{4}(a^2-r^2)\left[-\tfrac{1}{2}z_1^2 - z_1 - \frac{1}{z_1} + \log z_1 + \tfrac{1}{2}z_2^2 - z_2 - \frac{1}{z_2} - \log z_2\right] \text{ ou bien}$$

284. $$= \tfrac{1}{4}(a^2-r^2)\left[-\frac{2z}{z^2-1} + \log\frac{z-1}{z+1}\right].$$

En y substituant la valeur $\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{r^2-y^2}\right)}$ de z, où $\sqrt{(r^2-y^2)} = r-x$, on obtient

285. $$-\tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(a^2-2rx+x^2)} + \tfrac{1}{4}(a^2-r^2)\log\frac{\sqrt{(a^2-2rx+x^2)}-(r-x)}{\sqrt{(a^2-2rx+x^2)}+(r-x)}.$$

d. L'intégrale de $-\sqrt{(a^2-(r-x)^2)}\,\partial x$ dans (277) est l'aire du segment d'un cercle dont le rayon est $= a$, et l'abscisse, prise du centre, $= r-x$, donc cette intégrale est

286. $$= +\tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{r-x}{a} + \tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(a^2-(r-x)^2)}.$$

e. La somme des expressions (278, 279, 285 et 286) est l'intégrale de ∂X (277), donc on a

$$287.\quad X = \frac{\pi^2 \Delta^4 \sigma}{8B}\Big[4m_1\lambda x + ax + \tfrac{1}{2}x^2 + x\sqrt{(a^2-r^2)} + \tfrac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r} - \tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)} + \tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(a^2-2rx+x^2)} - \tfrac{1}{4}(a^2-r^2)\log\frac{\sqrt{(a^2-2rx+x^2)}-(r-x)}{\sqrt{(a^2-2rx+x^2)}+(r-x)} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{r-x}{a} + \tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(a^2-(r-x)^2)}\Big] + \tfrac{1}{2}\nu\pi\Delta^2\sigma x.$$

Cela donne pour $x = 0$,

$$288.\quad X_0 = \frac{\pi^2 \Delta^4 \sigma}{8B}\Big[\tfrac{1}{2}ar - \tfrac{1}{4}(a^2-r^2)\log\frac{a-r}{a+r} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{r}{a} + \tfrac{1}{2}r\sqrt{(a^2-r^2)}\Big],$$

et pour $x = 2r$,

$$289.\quad X_2 = \frac{\pi^2 \Delta^4 \sigma}{8B}\Big[8m_1\lambda r + 2ar + r^2 + 2r\sqrt{(a^2-r^2)} + \tfrac{1}{2}r^2\pi - \tfrac{1}{2}ar - \tfrac{1}{4}(a^2-r^2)\log\frac{a+r}{a-r} - \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{r}{a} - \tfrac{1}{2}r\sqrt{(a^2-r^2)}\Big] + \nu\pi\Delta^2 r\sigma,$$

donc

$$290.\quad X_2 - X_0 = \frac{\pi^2 \Delta^4 \sigma}{8B}\Big[8m_1\lambda r + ar + 2r^2 + r\sqrt{(a^2-r^2)} + \tfrac{1}{2}r^2\pi - \tfrac{1}{2}(a^2-r^2)\log\frac{a+r}{a-r} - a^2 \arcsin\frac{r}{a}\Big] + \nu\pi\Delta^2 r\sigma,$$

et en vertu de (267),

$$291.\quad \frac{Q}{4g}(v_1^2 - v_0^2) = -\frac{\pi\Delta^4\sigma}{4B}\Big[8m_1\lambda r + ar + 2r^2 + r\sqrt{(a^2-r^2)} + \tfrac{1}{2}r^2\pi - \tfrac{1}{2}(a^2-r^2)\log\frac{a+r}{a-r} - a^2 \arcsin\frac{r}{a}\Big] - \pi ZD - \nu\pi\Delta^2 r\sigma.$$

G. La valeur de m, dans cette formule, est, comme il a été dit, $= 0$ pour le ***premier*** tour de la manivelle, $= 1$ pour le ***second*** etc.; mais toutes les autres quantités de l'expression ont les mêmes valeurs pour un tour quelconque; donc ce n'est que le ***premier*** terme à droite dans (291) qui change de valeur pour les tours successifs.

Supposons pour abréger

$$292.\quad \frac{\pi^2 \Delta^4 \sigma}{4B}\Big[ar + 2r^2 + r\sqrt{(a^2-r^2)} + \tfrac{1}{2}r^2\pi - \tfrac{1}{2}(a^2-r^2)\log\frac{a+r}{a-r} - a^2 \arcsin\frac{r}{a}\Big] = C,$$

la formule (291) donnera

293.
$$\begin{cases}
\frac{Q}{4g}(v_1^2-v_0^2) = \quad 0 \quad -C-\pi ZD-\nu\pi\Delta^2 r\sigma \text{ pour le premier tour de la manivelle,}\\
\frac{Q}{4g}(v_2^2-v_1^2) = -1\cdot\frac{2\pi^2\Delta^2\lambda r\sigma}{B}-C-\pi ZD-\nu\pi\Delta^2 r\sigma \text{ pour son second tour,}\\
\frac{Q}{4g}(v_3^2-v_2^2) = -2\cdot\frac{2\pi^2\Delta^2\lambda r\sigma}{B}-C-\pi ZD-\nu\pi\Delta^2 r\sigma \text{ pour son troisième tour,}\\
\frac{Q}{4g}(v_4^2-v_3^2) = -3\cdot\frac{2\pi^2\Delta^2\lambda r\sigma}{B}-C-\pi ZD-\nu\pi\Delta^2 r\sigma \text{ pour son quatrième tour,}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{Q}{4g}(v_m^2-v_{m-1}^2) = -(m-1)\frac{2\pi^2\Delta^2\lambda r\sigma}{B}-C-\pi ZD-\nu\pi\Delta^2 r\sigma \text{ pour son } m^{\text{ième}} \text{ tour.}
\end{cases}$$

La *somme* de ces formules, λ étant $= 2r$, est

294. $$\frac{Q}{4g}(v_m^2-v_0^2) = -\tfrac{1}{2}m(m-1)\lambda^2\frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{B}-mC-m\pi ZD-\tfrac{1}{2}m\nu\pi\Delta^2\lambda\sigma.$$

H. Soit

295. $$ar+2r^2+r\sqrt{(a^2-r^2)}+\tfrac{1}{2}r^2\pi-\tfrac{1}{2}(a^2-r^2)\log\frac{a+r}{a-r}-a^2\arcsin\frac{r}{a} = c,$$

de sorte que

296. $$C = \frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{4B}\cdot c \text{ (292)},$$

l'expression (294) se change en

297. $$\frac{Q}{4g}(v_0^2-v_m^2) = m\left[\frac{2(m-1)\lambda^2+c}{4B}\cdot\pi^2\Delta^4\sigma+\pi ZD+\tfrac{1}{2}\nu\pi\Delta^2\lambda\sigma\right].$$

Si L est la distance parcourue par le train, pendant que les roues de propulsion font m tours, on a

298. $$L = m\pi D \quad \text{et} \quad m = \frac{L}{\pi D}.$$

Cela étant substitué dans (297) donne

299. $$\frac{Q}{4g}(v_0^2-v_m^2) = L\left[\Delta^4\sigma\frac{2(L-\pi D)\lambda^2+c\pi D}{4BD^2}+Z+\frac{\nu\Delta^2\lambda\sigma}{2D}\right].$$

I. Ici, comme on le voit, la longueur a de la ***bielle*** n'est ***pas indifférente:*** elle influe sur la valeur de la quantité c (295).

Dans le cas où a est beaucoup plus grand que r, de sorte que $\frac{r}{a}$ peut être approximativement posé $= 0$, l'expression de c (295) se simplifie beaucoup.

Donnons à c la forme

300. $$c = ar + 2r^2 + ar\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)} + \tfrac{1}{2}r^2\pi - \tfrac{1}{2}a^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\log\frac{1+\frac{r}{a}}{1-\frac{r}{a}} - a^2 \arcsin\frac{r}{a}.$$

On a $\log\frac{1+\frac{r}{a}}{1-\frac{r}{a}} = 2\left(\frac{r}{a}+\frac{r^3}{3a^3}+\frac{r^5}{5a^5}\cdots\right)$. Cette série multipliée par $\frac{1}{2}a^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$ ou plutôt par $\frac{1}{2}a^2$, $\frac{r}{a}$ ayant été supposé $=0$, donne $ar+\frac{r^3}{3a}+\frac{r^5}{5a^3}\cdots$, ou plutôt seulement ar, les autres termes étant zéro, à cause de $\frac{r}{a}=0$; donc le *cinquième* terme à droite dans c (300) et le *premier* se détruisent l'un l'autre. Puis on a $\sin\frac{r}{a}=\frac{r}{a}$, si $\frac{r}{a}$ est très-petit, donc aussi le *sixième* terme et le *troisième* $ar\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}$, qui se réduit à ar, se détruisent également. Il ne reste donc pour c que le *second* et le *quatrième* terme; et on obtient

301. $$c = 2r^2 + \tfrac{1}{2}r^2\pi = \tfrac{1}{2}\lambda^2(1+\tfrac{1}{4}\pi).$$

C'est effectivement la valeur que c doit avoir dans le cas où a est beaucoup plus grand que r. Car dans ce cas u_1 (273) est seulement $=x$ et $u_2=y$, donc p (275) est $=\frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{8B}(4m_1\lambda+x+y)$ et $\partial X(277)=\frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{8B}(4m_1\lambda+x+y)\partial x$. L'intégrale de $y\,\partial x$, prise de $x=0$ jusqu'à $x=2r$, étant l'aire $\frac{1}{2}r^2\pi$ du demi-cercle AMD, on obtient $X_2-X_0=\frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{8B}(8m_1\lambda r+2r^2+\frac{1}{2}r^2\pi)$, et c prend la valeur (301).

La valeur réduite de c étant substituée dans (299), on obtient

302. $$\frac{Q}{4g}(v_0^2-v_m^2) = \left[\Delta^4\sigma\frac{(2L-(\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\pi)\pi D)\lambda^2}{4BD^2}+Z+\frac{v\Delta^2\lambda\sigma}{2D}\right].$$

Comme dans cette formule $(\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\pi)\pi D=3{,}5D$ sera toujours très-petit par rapport à la double distance $2L$ parcourue par le train, on pourra supprimer aussi cette quantité, et alors l'expression (302) se réduit à

303. $$\frac{Q}{4g}(v_0^2-v_m^2) = L\left[Z+\frac{\Delta^4\lambda^2L\sigma}{2BD^2}+\frac{v\Delta^2\lambda\sigma}{2D}\right] = L\left[Z+\frac{\Delta^2\lambda\sigma}{2D}\left(v+\frac{\Delta^2\lambda L}{BD}\right)\right].$$

K. La différence des valeurs de c, dans le cas où l'on a égard ou non à la longueur a de la bielle est ordinairement peu sensible. Supposons, par exemple, une manivelle de 23,5 centim., la longueur de la bielle sera au

moins 1,41 mèt. Ces dimensions de r et de a donnent

304. $c = 0{,}197$ suivant (295), et

305. $c = 0{,}208$ suivant (301).

Donc ces valeurs de c ne diffèrent entre elles que d'un ***vingtième*** environ, et la valeur réduite, peut fort bien prendre la place de l'autre; et cela encore à plus forte raison, parceque $c\pi D$ en (299) lui-même est peu considérable envers $2(L-\pi D)\lambda^2$, de sorte que l'expression réduite (303), est assez exacte pour la pratique.

L. Si l'on substitue encore dans (303) l'expression de Z, savoir

306. $Z = Q(n+\text{tang}\beta)$ (103),

où il faut donner à $\text{tang}\beta$ la valeur qu'il a, à l'endroit où le bassin-condenseur doit agir, la formule (299) donne

307. $$QBD^2[v_0^2-v_m^2-4g(n+\text{tang}\beta)L]=2L\Delta^4\sigma g\left[(L-\pi D)\lambda^2+\tfrac{1}{2}c\pi D+\frac{\nu\lambda BD}{\Delta^2}\right]$$

et la formule réduite (303) donne

308. $$QBD^2[v_0^2-v_m^2-4gL(n+\text{tang}\beta)] = 2gL\Delta^2\lambda\sigma[L\Delta^2\lambda+\nu BD].$$

M. Voilà l'équation cherchée entre la vitesse du train, le volume B du bassin-condenseur, et la distance L parcourue par le train dans le temps où la vitesse v_0 que le train avait à son depart, est réduite par le bassin à v_m. On pourra donc trouver par l'équation (307), ou par celle (308), une des trois quantités v_m, B et L si les deux autres sont données, et suivant (*K.*), on y employera l'équation réduite (308). Cela donne

a. Si B et L sont donnés:

309. $$v_m^2 = v_0^2-4gL(n+\text{tang}\beta)-\frac{2gL\Delta^2\lambda\sigma(L\Delta^2\lambda+\nu BD)}{D^2BQ}.$$

b. Si L et v_m sont donnés

310. $$B = \frac{2gL^2\Delta^4\lambda^2\sigma}{D[DQ(v_0^2-v_m^2-4gL(n+\text{tang}\beta)-2gL\Delta^2\lambda\nu\sigma]}.$$

Si l'on veut que v_m soit *égal* à v_0, on obtient

311. $$B = -\frac{L\Delta^4\lambda^2\sigma}{D[2(n+\text{tang}\beta)DQ+\Delta^2\lambda\nu\sigma]}.$$

Si l'on veut que v_m soit $=0$, on a

312. $$B = \frac{2gL^2\Delta^4\lambda^2\sigma}{D[DQ(v_0^2-4gL(n+\text{tang}\beta)-2gL\Delta^2\lambda\nu\sigma]}.$$

c. Si B *et* v_m *sont donnés on obtient*

313. $$L = -\frac{BD}{\Delta^4\lambda^2\sigma}\Big[QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\lambda\nu\sigma \pm\sqrt{\Big((QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\lambda\nu\sigma)+(v_0^2-v_m^2)\frac{Q\Delta^4\lambda^2\sigma}{2gB}\Big)}\Big].$$

Cela donne

314. $$L = -\frac{2BD}{\Delta^4\lambda^2\sigma}[QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{4}\Delta^2\lambda\nu\sigma] \text{ pour } v_m = v_0, \text{ et}$$

315. $$L = -\frac{BD}{\Delta^4\lambda^2\sigma}\Big[QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\lambda\nu\sigma \pm\sqrt{\Big((QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\lambda\nu\sigma)^2+v_0^2\cdot\frac{Q\Delta^4\lambda\sigma}{2gB}\Big)}\Big] \text{ pour } v_m = 0.$$

N. La tension effective s_1 à laquelle l'air est comprimé dans le bassin-condenseur après m tours des manivelles, est suivant (*C.* et *D.*)

316. $$s = \frac{m\pi\Delta^2\lambda}{B}+\nu = \frac{L}{\pi D}\cdot\frac{\pi\Delta^4\lambda}{B}+\nu = \frac{L\Delta^2\lambda}{DB}+\nu.$$

En substituant dans cette expression celle de B (310), on obtient

317. $$s = \frac{DQ[v_0^2-v_m^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta)]}{2g\Delta^2\lambda\sigma},$$

et cela donne

318. $$s = -\frac{2DQ(n+\operatorname{tang}\beta)}{\Delta^2\lambda\sigma} \text{ pour } v_m = v_0 \text{ et}$$

319. $$s = \frac{DQ[v_0^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta)]}{2gL\Delta^2\sigma} \text{ pour } v_m = 0.$$

O. Cherchons la grandeur B d'un bassin-condenseur capable de modérer la vitesse d'un train du poids de 92770 kilogr. descendant d'une pente de $\operatorname{tang}\beta = -0{,}01$ et tiré par une locomotive à air dont les cylindres ont $\Delta = 31{,}3$ centim. de diamètre et $\lambda = 50{,}2$ centim. de longueur, de sorte, qu'ayant parcouru une distance de 628 mèt., la vitesse v_m au *pied* de cette rampe soit *égale* à celle v_0 au *sommet*, la formule (311), en posant $\nu = 0$, donne

320. $B = 3{,}66$ mèt. cub.

et suivant (318) l'air dans le bassin-condenseur sera comprimé par cela à

321. $s = 4{,}5$ atmosphères.

P. Comme il a été remarqué ci-dessus, le bassin-condenseur peut être employé aussi à détruire tout-à-fait la vitesse du train.

Supposons qu'un train du poids de 92770 kilogr. roule sur une voie horizontale avec la vitesse de 8,37 mèt. par seconde, et que cette vitesse doive être détruite à une distance L de 31,3 mèt., et au moyen d'un bassin-

condenseur, dans lequel l'air est *déjà* comprimé à $\nu = 10$ atmosphères, la locomotive ayant les dimensions supposées ci-dessus, la formule (312) donne

322. $B = 0{,}0124$ mèt. cub.

pour le volume que doit avoir ce bassin, et l'air y sera comprimé suivant (319) à

323. $s = 82{,}3$ atmosphères.

Cela, évidemment impraticable, devient praticable, si l'on donne à la machine des cylindres de plus grandes dimensions, ou si l'on admet, que l'effet demandé ne soit produit que sur une plus grande distance du trajet. Par ex. si cette distance est de 94 mèt., les formules donnent 0,16 mèt. cub. pour B et 25,4 atm. ponr s, ce qui est déjà praticable.

Donc, si sur une locomotive à air, on place un petit bassin-condenseur très-solide, on peut s'en servir pour arrêter un train à une distance non pas trop considérable; et alors, au lieu de consommer par cette manoeuvre de l'air comprimé, on en gagne. Seulement dans les cas où le train doit être arrêté *subitement*, il faut se servir des moyens d'enrayement ordinaires.

(La suite au cahier prochain.)

15.

Beweis des Satzes, dafs jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

Wenn man eine ganze positive Zahl P auf alle mögliche Arten aus andren, von einander verschiednen, ganzen positiven Zahlen durch Addition zusammensetzt, so wird die Anzahl dieser Zusammensetzungen der Coëfficient von q^P in der Entwicklung des unendlichen Products

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.$$

Darf bei den Zusammensetzungen dieselbe Zahl wiederholt angewandt werden, so wird ihre Anzahl der Coëfficient von q^P in der Entwicklung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots.},$$

wie man sogleich sieht, wenn man jeden Factor $\frac{1}{1-q}$, $\frac{1}{1-q^2}$ etc. besonders entwickelt, und die erhaltnen Reihen mit einander multiplicirt. Die letztere Betrachtung veranlafste ***Euler,*** den Nenner dieses Bruchs durch wirkliche Ausführung der Multiplication zu bilden, und er entdeckte, dafs in dem erhaltnen Producte nur solche Potenzen von q übrig bleiben, deren Exponenten die in der Formel $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ enthaltnen, sogenannten fünfeckigen Zahlen sind; dafs sich ferner die Coëfficienten dieser Potenzen immer auf die Einheit reduciren, und zwar auf die positive, wenn i gerade, auf die negative, wenn i ungerade ist. Man findet diese merkwürdige Induction in dem 16ten Capitel des 4ten Theiles seiner ***Introductio in Analysin Infinitorum,*** welches von der Theilung der Zahlen handelt, und mit wenigen Abänderungen und Auslassungen aus einer Abhandlung gleichen Inhaltes entnommen ist, welche ***Euler*** im 3ten Bande der Neuen Petersb. Comm. für die Jahre 1750 und 51 (S. 155 ff.) publicirt hat. Er hatte aber diese glückliche Bemerkung bereits im J. 1740 gemacht, wie aus einem von Hrn. Staatsrath von ***Fufs*** publicirten Briefe ***Daniel Bernoullis*** vom 28. Jan. 1741 erhellt *). ***Euler*** erlangte hiedurch für die Entwicklungs-

---

*) *Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres Géomètres du 17ième siècle t. II pg. 467.* „Das *problema de combinandis numeris datam sum-*

coëfficienten des obigen Bruchs eine einfache Recursionsscale, und indem er das unendliche Product und die ihr gleiche Reihe logarithmisch differentiirte, später auch eine ähnliche Recursionsscale für die Factorensumme der auf einander folgenden natürlichen Zahlen. S. die Abhandlung *„Observatio de Summis Divisorum" im 5ten Bande der Neuen Comm. für die Jahre 1754 und 55 S. 59—74.* Aber diese Anwendungen mufsten gegen den Umstand ganz unbedeutend erscheinen, dafs hier zum ersten Male in der Analysis eine Entwicklung auftrat, in welcher die Exponenten eine *arithmetische Reihe zweiter Ordnung* bilden. Einen einfachen Beweis des von ihm durch Induction gefundnen Resultats gab *Euler* bereits in dem zuletzt genannten Bande der *Neuen Comm.*, in einer Abhandlung *Demonstratio Theorematis Circa Ordinem in Summis Divisorum Observatum (S. 75—83).* Derselbe Beweis wurde von ihm 25 Jahre später, wenige Jahre vor seinem Tode, in dem *1ten Theile des 4ten Bandes der Acta der Petersb. Ak. für das Jahr 1780* in der Abhandlung *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ *in seriem simplicem* etwas modificirt, so wie er auch in demselben Bande in der Abhandlung *De mirabilibus proprietatibus Numerorum Pentagonalium* die Anwendung auf die rücklaufende Bildung der Factorensummen wiederholt hat. In den *Philosophical Transactions vom Jahr 1788 (S. 388—394)* hat *Eduard Waring* in der Abh. *„Some Properties of the Sum of the Divisors of Numbres"* diese letztre Arbeit *Eulers* wiedergegeben, ohne etwas hinzuzufügen und ohne den *Eulerschen* Beweis des Entwicklungsgesetzes des unendlichen Productes mitzutheilen. Von diesem Beweise findet man nur in dem Wörterbuche des gelehrten *Klügel* unter dem Artikel *Pentagonalzahlen* Erwähnung gethan, bis ich im J. 1829 in meinen *Fundamentis Novis Theoriae Functionum Ellipticarum* wieder auf denselben aufmerksam gemacht habe. Die dort bewiesnen Theoreme geben Entwicklungen unendlicher Producte in Reihen, in denen die Exponenten eine *beliebige* Reihe zweiter Ordnung bilden.

---

mam efficientibus ist *in casibus particularibus* gar leicht: einige Circumstanzen machen, dafs man die *regulam generalem* nicht siehet, doch aber kann man die *methodum generalem* anzeigen. Den *calculum* von Ihrem Exempel *de numero 30 in 7 partes dividendo* habe ich nicht gemacht, solches aber meinem Vetter *Nicolas Bernoulli* gegeben, welcher eben die Zahl gefunden, die Ew. herausgebracht. Das andre *problema, transformare expressionem* $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\cdots$ *in seriem* $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^{12}}-\frac{1}{n^{15}}+$ etc. kommt auch leicht *per inductionem* heraus, wenn man viele *factores* von der *proposita expressione actu* multipliciret."

Setzt man nämlich in den in den *Fundamentis* gegebnen Formeln q^n statt q und $z = \pm q^m$, so erhält man die Gleichungen,

$$(1-q^{n-m})(1-q^{n+m})(1-q^{2n})(1-q^{3n-m})(1-q^{3n+m})(1-q^{4n})\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{nii+mi},$$

$$(1+q^{n-m})(1+q^{n+m})(1-q^{2n})(1+q^{3n-m})(1+q^{3n+m})(1-q^{4n})\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{nii+mi},$$

deren erste für $n = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ die *Eulersche* Formel giebt. *Gauſs* hat im *1ten Bande der Göttinger Commentarien für die Jahre 1808—11* in seiner Abhandlung *Summatio Serierum quarundam singularium* zuerst wieder nach *Euler* das Beispiel einer ähnlichen Entwicklung eines unendlichen Productes gegeben, welches der zweiten der beiden vorstehenden allgemeinen Formeln für die Werthe $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ entspricht. Ob er das *Eulersche* Resultat gekannt hat, läfst sich aus seiner Arbeit nicht ersehen. *Legendre* hat in der *dritten* Ausgabe seiner *Théorie des Nombres* Th. II. S. 128 einen Beweis der *Eulerschen* Formel gegeben, der von dem *Eulerschen* Beweise verschieden ist. Da er bei dieser Gelegenheit nur der ersten Arbeiten *Eulers* über diesen Gegenstand in der *Introductio* und dem Bande III. der *Novi Commentarii* Erwähnung thut, wo das Resultat durch Induction gefunden wird, so scheint *Legendre* den *Beweis*, den später *Euler* selbst gegeben hat, nicht gekannt zu haben.

Obgleich ich in den *Fundamentis Novis* zwei einfache Beweise der allgemeinen Formeln mitgetheilt habe, und insbesondere der zweite dieser Beweise einen ganz elementaren Character hat, so scheint es mir doch nicht ohne Interesse, auf jenen schönen *Eulerschen*, den Mathematikern fast unbekannt gebliebnen Beweis der speciellen Formel zurückzukommen. Ich werde daher im Folgenden den *Eulerschen* Beweis seinem wesentlichen Gedankengange nach reproduciren, den Resultaten aber dadurch eine gröfsere Allgemeinheit geben, dafs ich die von *Euler* gebrauchte Methode auf begränzte Producte anwende. Ich werde ferner hiebei der *Eulerschen* Formel den correspondirenden Satz über die Theilung der Zahlen substituiren, und diesen Satz selbst ohne Vermittlung von unendlichen Producten oder Reihen beweisen.

Aus der *Eulerschen* Formel folgt nämlich der nachstehende Satz, aus welchem sie selbst wieder eine unmittelbare Folge ist:

> Jede Zahl, welche nicht die Form $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ hat, kann eben so oft in eine gerade als in eine ungerade Menge andrer von einander verschiedner Zahlen zerlegt werden; Zahlen von der Form $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ aber können in

eine gerade Menge *einmal* mehr oder weniger als in eine ungerade zerlegt werden, und zwar das eine oder das andre, je nachdem i gerade oder ungerade ist.

Diesen aus der *Eulerschen* Formel sich ergebenden Satz bemerkt auch *Legendre* am angeführten Orte. Es wird dadurch eine elementare Operation, das Abzählen, wie oft eine Zahl aus einer geraden oder ungeraden Menge andrer von einander verschiedner durch Addition zusammengesetzt werden kann, in eine Beziehung zu der ***Dreitheilung der elliptischen Integrale*** gesetzt, welcher die *Eulersche* Formel in der Theorie der elliptischen Functionen entspricht. Ich wende mich jetzt zu dem Beweise selbst.

Wenn man eine Gröfse $\boldsymbol{P}$ auf alle mögliche Arten aus andern, welche unter sich und von Null verschieden sind, und aus der Zahl gegebner Elemente α, β, γ etc. genommen werden sollen, durch Addition zusammensetzt, ohne dabei ein Element wiederholt anzuwenden, so will ich den Überschufs der Anzahl derjenigen Zusammensetzungen, in welchen die Zahl der angewandten Elemente gerade ist, über die Anzahl derjenigen, in welchen diese Zahl ungerade ist, durch

$$(\boldsymbol{P}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

bezeichnen, wobei ich unter Überschufs sowohl eine positive als eine negative Gröfse verstehen werde. Wenn die gegebnen Elemente α, β, γ etc. alle positiv sind, so kann der Werth von $\boldsymbol{P}$ nicht kleiner als das kleinste derselben und nicht gröfser als die Summe aller sein, widrigenfalls die Gröfse $(\boldsymbol{P}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ verschwindet. Die Ordnung, in welcher die Elemente α, β etc. geschrieben werden, ist, wie man sieht, gleichgültig.

Um den nachfolgenden Sätzen eine allgemeine Gültigkeit zu geben, will ich ferner festsetzen, dafs für $\boldsymbol{P} = 0$ das Zeichen $(\boldsymbol{P}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ den angegebnen Überschufs ***noch um 1 vermehrt*** bedeute, und dafs die Gröfse $(\boldsymbol{P}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ verschwinde, so wie eines der Elemente α, β etc. $= 0$ wird.

Wenn man den im Vorigen bezeichneten Überschufs nur in Bezug auf diejenigen Zusammensetzungen von $\boldsymbol{P}$ betrachtet, in welchen das Element α nicht vorkommt, so wird dieser Theil desselben $(\boldsymbol{P}, \beta, \gamma, \ldots)$. Jeder Zusammensetzung ferner, in welcher α unter den Elementen vorkommt, entspricht eine andre von $\boldsymbol{P} - \alpha$ aus den übrigen gegebnen Elementen. Aber da die Anzahl der Elemente, die bei der Zusammensetzung verwendet werden, um *eines* geringer geworden ist, ist zugleich aus einer geraden immer eine ungerade, aus einer ungeraden eine gerade Anzahl geworden. Es wird daher der andre

Theil des Überschusses, welcher sich auf die Zusammensetzungen von P bezieht, bei welchen das Element α concurrirt, durch $-(P-\alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ ausgedrückt. Hieraus folgt die Formel

$$\text{I.} \quad (P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.) = (P, \beta, \gamma, \ldots.) - (P-\alpha, \beta, \gamma, \ldots.),$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, unter den festgesetzten Bestimmungen auch auf diejenigen Fälle ausgedehnt werden kann, in welchen P oder $P-\alpha$ oder eines der Elemente α, β etc. verschwindet.

Für *ein* Element α wird in Folge der gegebnen Definitionen $(P, \alpha) = 0$, 1 oder -1, je nachdem P von α und 0 verschieden, $= 0$ oder $= \alpha$ ist; es wird ferner $(P, \alpha) = 0$, wenn $P = \alpha = 0$. ***Wenn man daher mit***

$$[N]$$

eine Gröfse bezeichnet, welche $= 1$ ***ist, wenn*** N ***verschwindet, und*** $= 0$ ***ist, wenn*** N ***von*** 0 ***verschieden ist,*** so wird in allen Fällen

$$\text{II.} \quad (P, \alpha) = [P] - [P-\alpha].$$

Auf den Formeln I. und II. beruht die ganze nachstehende Untersuchung.

Ich betrachte das Aggregat

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots. + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots. a_{m-1}),$$

in welchem die Elemente $a, a_1, \ldots. a_{m-1}$ ***eine beliebige arithmetische Reihe und die Zahlen*** $b_0, b_1, \ldots. b_{m-1}$ ***eine arithmetische Reihe mit der Differenz*** $-a$ ***bilden.*** Dieses Aggregat verwandelt sich mittelst I. in folgendes:

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad & (b_0, a) + (b_1, a_1) + (b_2, a_1, a_2) + (b_3, a_1, a_2, a_3) \ldots. + (b_{m-1}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}) \\ & - (b_2, a_1) \quad - (b_3, a_1, a_2) \quad \ldots. - (b_{m-1}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-2}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad - (b_m, \ a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}).\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck reducire man je zwei unter einander stehende Terme mittelst der aus I. folgenden Formel

$$(P, a_1, a_2, \ldots. a_{i+1}) - (P, a_1, a_2, \ldots. a_i) = -(P - a_{i+1}, a_1, a_2, \ldots. a_i).$$

Wenn man

$$c_i = b_{i+1} - a_{i+1}$$

setzt, und die aus II. sich ergebende Gleichung

$$(b_0, a) + (b_1, a_1) = [b_0] - [c_0]$$

zu Hülfe ruft, so erhält man hiedurch

$$\begin{aligned}\text{IV.} \quad & (b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots. + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots. a_{m-1}) \\ & = [b_0] - [c_0] - (b_m, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}) \\ & - \{(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2) + (c_3, a_1, a_2, a_3) \ldots. + (c_{m-2}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-2})\}.\end{aligned}$$

Da $c_{i+1} - c_i = -a - a_{i+2} + a_{i+1} = -a_1$, so bilden die Gröfsen c_0, c_1, c_2 etc.

eine arithmetische Reihe mit der constanten Differenz a_1. Bestimmt man nach und nach die $k-1$ Gröfsen d_i, e_i, ... z_i durch die ähnlichen Gleichungen, $d_i = c_{i+1} - a_{i+1}$, $e_i = d_{i+1} - a_{i+1}$, $f_i = e_{i+1} - a_{i+1}$, etc., $z_i = y_{i+1} - a_{i+1}$, so werden die Gröfsen d_i, e_i, f_i, ... y_i, z_i arithmetische Reihen bilden, welche respective die Gröfsen $-a_2$, $-a_3$, ... $-a_{k-1}$, $-a_k$ zu ihrer constanten Differenz haben. Setzt man

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}) = A_1,$$
$$(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2) + (c_3, a_1, a_2, a_3) \ldots + (c_{m-2}, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}) = A_2,$$
$$(d_2, a_2) + (d_3, a_2, a_3) + (d_4, a_2, a_3, a_4) \ldots + (d_{m-3}, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{m-3}) = A_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_{k-1}, a_k) + (y_{k+1}, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) \ldots + (y_{m-k}, a_{k-1}, a_k, \ldots a_{m-k}) = A_k,$$

so wird durch IV. das Aggregat A_1 auf A_2 zurückgeführt. Da aber die Aggregate A_1, A_2, ... A_k alle auf dieselbe Art gebildet sind, so kann man durch analoge Formeln A_2 auf A_3, A_3 auf A_4 etc. zurückführen. Wenn man nämlich nach und nach c und d für b und c, d und e für c und d u. s. f., ferner immer $m-2$ für m setzt, und jedesmal alle Indices um 1 vergröfsert, so giebt die Formel IV. das folgende System Gleichungen:

$$A_1 + A_2 = [b_0] - [c_0] - (b_m, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}),$$
$$A_2 + A_3 = [c_1] - [d_1] - (c_{m-1}, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}),$$
$$A_3 + A_4 = [d_2] - [e_2] - (d_{m-2}, a_3, a_4, \ldots a_{m-3}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{k-1} + A_k = [x_{k-2}] - [y_{k-2}] - (x_{m-k+2}, a_{k-1}, a_k, \ldots a_{m-k+1}).$$

Wenn man in der 2ten, 4ten etc. Gleichung alle Zeichen ändert, und dann sämmtliche Gleichungen addirt, so erhält man hieraus

$$\text{V.} \quad A_1 + (-1)^k A_k$$
$$= [b_0] - [c_1] + [d_2] \ldots + (-1)^k [x_{k-2}]$$
$$- [c_0] + [d_1] - [e_2] \ldots - (-1)^k [y_{k-2}]$$
$$- (b_m, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}) + (c_{m-1}, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^k (x_{m-k+2}, a_{k-1}, a_k \ldots a_{m-k+1}).$$

Da im letzten Aggregat mit jedem folgenden Term sich die Zahl der Elemente um zwei verringert, so ist der gröfste Werth, welchen k annehmen kann, je nachdem m gerade oder ungerade ist, $k = \frac{1}{2}m$ oder $k = \frac{1}{2}(m+1)$. Für den ersten Werth von k reducirt sich der oben für A_k gegebne Ausdruck auf

$$(y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_{k-1}, a_k) = (y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_k) - (y_{k+1}, a_k)$$
$$= [y_{k-1}] - [z_{k-1}] - (y_{k+1}, a_k)$$

oder auf

$$A_{\frac{1}{2}m} = [y_{\frac{1}{2}m-1}] - [z_{\frac{1}{2}m-1}] - (y_{\frac{1}{2}m+1}, a_{\frac{1}{2}m}),$$

für den zweiten Werth von k wird derselbe

$$A_{\frac{1}{2}(m+1)} = (y_{\frac{1}{2}(m-1)}, a_{\frac{1}{2}(m-1)}) = [y_{\frac{1}{2}(m-1)}] - [z_{\frac{1}{2}(m-3)}].$$

Man erhält daher aus V., wenn man dem Index k seinen gröfsten Werth giebt,

VI. $$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1})$$
$$= \Delta - (b_m, a_1, a_2, .. a_{m-1}) + (c_{m-1}, a_2, a_3, .. a_{m-2}) - \text{etc.},$$

wo man den Ausdruck rechts bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}(y_{\frac{1}{2}m+1}, a_{\frac{1}{2}m})$$

oder bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}.(x_{\frac{1}{2}(m+3)}, a_{\frac{1}{2}(m-1)}, a_{\frac{1}{2}(m+1)})$$

fortsetzen mufs, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Es wird ferner

VII. $$\Delta = [b_0] - [c_0] - [c_1] + [d_1] + [d_2] - [e_2] - \text{etc.},$$

welchen Ausdruck man, je nachdem m gerade oder ungerade, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m-1}[y_{\frac{1}{2}m-1}] + (-1)^{\frac{1}{2}m}[z_{\frac{1}{2}m-1}]$$

oder bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[y_{\frac{1}{2}(m-1)}] + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}[z_{\frac{1}{2}(m-3)}]$$

fortzusetzen hat, *in welchem letztern Ausdruck das zweite Glied dadurch von dem allgemeinen Bildungsgesetze abweicht, dafs sein Index um* 1 *verringert ist.* Da zufolge der oben gegebnen Definition $[N] = 1$ oder 0, je nachdem $N = 0$ oder von 0 verschieden ist, so wird Δ im Allgemeinen nur 0 oder ± 1 werden.

Die Gröfsen b_m, c_{m-1}, d_{m-2} etc. in VI. bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe $-a_m$, $-a_{m-1}$, $-a_{m-2}$ etc. ist. Die Gröfsen b_0, c_1, d_2, e_3, ... y_{k-1} und c_0, d_1, e_2, ... z_{k-1} in VII. bilden ebenfalls arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihen respective

$$-(a_2 + 2a), \quad -(a_3 + 2a_1), \quad \ldots. \quad -(a_k + 2a_{k-2}),$$
$$-(2a_1 + a_2), \quad -(2a_2 + a_3), \quad \ldots. \quad -(2a_{k-1} + a_k)$$

sind, von denen man die erstre auch so darstellen kann

$$-(a + 2a_1), \quad -(a_1 + 2a_2), \quad -(a_2 + 2a_3), \quad \ldots. \quad -(a_{k-2} + 2a_{k-1}),$$

wo immer $k = \frac{1}{2}m$ oder $\frac{1}{2}(m+1)$. Setzt man

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_i,$$

so werden diese beiden Reihen zweiter Ordnung,

$$b_0, \; b_1 - 2s_1, \; b_1 - s_1 - 2s_2, \; b_1 - s_2 - 2s_3, \; \ldots. \; b_1 - s_{k-2} - 2s_{k-1},$$
$$b_1 - s_1, \; b_1 - 2s_1 - s_2, \; b_1 - 2s_2 - s_3, \; \ldots. \; b_1 - 2s_{k-2} - s_{k-1}, \; b_1 - 2s_{k-1} - s_k.$$

Die in diesen beiden Reihen enthaltnen Gröfsen machen alle aus, welche in den Ausdruck VII. von Δ eingehen, wenn man noch für den Fall eines ungeraden m zu dem letzten Terme der zweiten Reihe a_k addirt, wodurch er sich in

$$b_1 - 3s_{k-1}$$

verwandelt. ***Wenn keine dieser Gröfsen verschwindet, verschwindet Δ; wenn aber eine dieser Gröfsen verschwindet, wird Δ abwechselnd $+1$ und -1; ist nämlich $b_1 = s_{i-1} + 2s_i$ oder $b_1 = 2s_{i-1} + s_i$, so wird der Werth von Δ durch $(-1)^i$ bestimmt.***

In dem besondern Falle, wenn ***zwei*** von den angegebnen Gröfsen verschwinden, hat man auf jede derselben die vorstehende Regel anzuwenden, und erhält dann für Δ einen der drei Werthe $0, +2, -2$.

Da man nach dem Vorigen die Gröfse Δ als gegeben ansehn kann, so reducirt sich durch die Formel VI. das vorgelegte Aggregat auf ein andres, das nur aus der ***halben*** Zahl Terme besteht. Sind die Gröfsen a, a_1, a_2 etc. alle positiv, so bilden die Gröfsen b_m, c_{m-1}, d_{m-2} etc. eine abnehmende Reihe, da alle Glieder ihrer ersten Differenzreihe $-a_m$, $-a_{m-1}$, $-a_{m-2}$ etc. negativ sind. In diesem Falle bietet daher die Formel VI. noch dadurch eine andre Reduction des vorgelegten Aggregates dar, dafs die kleineren Elemente, welche die gröfste Zahl der Zusammensetzungen hervorbringen, allmälig fortfallen, und die durch Addition der gegebnen Elemente zu bildenden Zahlen selber kleiner werden. Wenn man aber noch aufserdem die Zahl m so grofs annimmt, dafs $b_m = b_0 - ma$ kleiner als das kleinste der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ wird, in welchem Falle *a fortiori* auch die Gröfsen c_{m-1}, d_{m-2} etc. kleiner als diese Elemente werden, so verschwinden in VI. alle Terme des Aggregates rechts vom Gleichheitszeichen, und der vorgelegte Ausdruck reducirt sich lediglich auf die Gröfse Δ. Nimmt man noch an, dafs die Elemente a, a_1, a_2 etc. eine ***wachsende*** Reihe bilden, so hat man den folgenden Satz:

> Es seien b_0 und a positive Gröfsen, ma ein die Gröfse b_0 übertreffendes Vielfache von a; es sei b_0, b_1, b_2 etc. eine abnehmende arithmetische Reihe mit der constanten Differenz $-a$ und a, a_1, a_2 etc. eine beliebige wachsende arithmetische Reihe; ferner sei
>
> $$s_i = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_i:$$
>
> so wird das Aggregat
>
> $$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1})$$

verschwinden, aufser wenn b_1 einer der Gröfsen

$$s_{i-1}+2s_i \text{ oder } 2s_{i-1}+s_i$$

gleich wird, und in diesem Falle den Werth $(-1)^i$ erhalten.

Da nach der gemachten Voraussetzung $b_1 < (m-1)a$, $s_i > ia$ ist, so kann b_1 nur die Werthe von solchen Gröfsen $s_{i-1}+2s_i$, $2s_{i-1}+s_i$ annehmen, welche unter den oben angegebnen enthalten sind. Es gilt also der vorstehende Satz ohne eine Beschränkung für die Werthe von i. Man braucht ferner den einen nicht in der allgemeinen Form enthaltnen Werth $3s_{\frac{1}{2}(m-1)}$ nicht in Betracht zu ziehen, da ihn b_1 nicht erreichen kann.

Für $a=0$ verschwindet das vorgelegte Aggregat. Setzt man für diesen Fall in der Formel VI.

$$b_0 = b_1 = b_m = \boldsymbol{P}, \quad c_{m-1} = \boldsymbol{P}_1, \quad d_{m-2} = \boldsymbol{P}_2, \text{ etc.},$$

und $a_i = i$, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, so bilden $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ etc. eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe $-m$, $-m+1$, $-m+2$ etc. ist, so dafs allgemein

$$\text{VIII.} \quad \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P} - im + \tfrac{1}{2}i(i-1) = \boldsymbol{P} - \tfrac{1}{2}i(2m-i+1)$$

wird. Es wird ferner $s_{i-1} = \frac{1}{2}i(i-1)$, $s_i = \frac{1}{2}i(i+1)$ und

$$b_1 - 2s_{i-1} - s_i = \boldsymbol{P} - \tfrac{1}{2}i(3i-1), \quad b_1 - s_{i-1} - 2s_i = \boldsymbol{P} - \tfrac{1}{2}i(3i+1).$$

Die Formel VI. reducirt sich daher für diese besondre Annahme auf

$$\text{IX.} \quad (\boldsymbol{P}, 1, 2, \ldots . m-1) - (\boldsymbol{P}_1, 2, 3, \ldots . m-2) + (\boldsymbol{P}_2, 3, 4, \ldots . m-3) - \ldots . = \Delta,$$

wo der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-2)}(\boldsymbol{P}_{\frac{1}{2}(m-2)}, \tfrac{1}{2}m) \quad \text{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{2}(m-3)}(\boldsymbol{P}_{\frac{1}{2}(m-3)}, \tfrac{1}{2}(m-1), \tfrac{1}{2}(m+1)),$$

d. h. bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-2)}(\boldsymbol{P} - \tfrac{1}{8}(m-2)(3m+4), \tfrac{1}{2}m) \text{ oder}$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-3)}(\boldsymbol{P} - \tfrac{1}{8}(m-3)(3m+5), \tfrac{1}{2}(m-1), \tfrac{1}{2}(m+1))$$

fortzusetzen ist, *und wenn* $\boldsymbol{P}$ *eine der Zahlen* $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ *bis* $\frac{1}{8}m(3m-2)$ *oder* $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$ *ist,* $\Delta = (-1)^i$, *wenn* $\boldsymbol{P}$ *den Werth* $\frac{3}{8}(mm-1)$ *annimmt,* $\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}$, *und endlich, wenn* $\boldsymbol{P}$ *keine dieser Zahlen ist,* $\Delta = 0$ *wird.*

Wenn $\boldsymbol{P} \leqq m-1$, so werden $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ etc. negativ, und es reducirt sich daher der erste Theil der Gleichung IX. auf seinen ersten Term. Da ferner die Zusammensetzungen von $\boldsymbol{P} = m-1$ aus den Zahlen $1, 2, \ldots . m-1$ alle möglichen Zusammensetzungen von $\boldsymbol{P}$ aus ganzen positiven Zahlen sind, so erhält man aus IX., wenn man $\boldsymbol{P} = m-1$ setzt, den zu beweisenden Satz:

Der Überschufs der Anzahl der Zusammensetzungen einer Zahl P aus einer geraden Zahl über die Anzahl Zusammensetzungen ihrer aus einer ungeraden Zahl verschiedner ganzer positiver Zahlen, ist, wenn P eine fünfeckige Zahl $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ ist, $=(-1)^i$ und verschwindet für alle übrigen Werthe von P.

Es sind nämlich alle Werthe $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$, welche $P \leqq m-1$ annehmen kann, in den Werthen bis $\frac{1}{8}(3mm-2m)$ oder $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$ enthalten, und den besondern Werth $\frac{3}{8}(m-1)(m+1)$ kann eine Zahl, welche $\leqq m-1$ ist, nicht annehmen.

So wie der vorstehende Satz der *Eulerschen* Formel

$$\text{X.} \quad (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}$$

entspricht, so entsprechen auch die andern im Vorigen gefundnen Sätze analytischen Formeln. Setzt man die constante Differenz der Reihe a, a_1, a_2 etc. der *Einheit* gleich, ferner

$$q^a = z,$$

und

$$f_m(z) = (1-z)+z(1-z)(1-qz)+z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\ldots. \\ \ldots.+z^{m-1}(1-z)(1-qz)\ldots.(1-q^{m-1}z),$$

so entspricht der Satz IV. der Formel

$$\text{XI.} \quad f_m(z) = 1-qz^2-q^2z^3f_{m-2}(qz)-z^m(1-qz)(1-q^2z)\ldots.(1-q^{m-1}z).$$

Dem Satze VI. entsprechen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Formeln

$$\text{XII.}a. \quad f_m(z) = 1+\sum_{1}^{\frac{1}{2}m}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i} \\ -\sum_{0}^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(2m-i-1)}z^{m+i}(1-q^{i+1}z)(1-q^{i+2}z)\ldots.(1-q^{m-i-1}z),$$

$$\text{XII.}b. \quad f_m(z) = 1+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i} \\ +(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}q^{\frac{3}{8}(mm-1)}z^{\frac{1}{2}(3m+1)} \\ -\sum_{0}^{\frac{1}{2}(m-3)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(2m-i-1)}z^{m+i}(1-q^{i+1}z)(1-q^{i+2}z)\ldots.(1-q^{m-i-1}z).$$

Setzt man in XII.a. $m=2n$, $z=r^n$, $q=r^{-1}$, so verschwindet die zweite Horizontalreihe, da jedes der unter dem Summenzeichen enthaltnen Producte den verschwindenden Factor $1-q^{\frac{1}{2}m}z$ enthält. Die Formel XII.a. verwandelt sich daher für diese Annahme in die folgende:

XIII. $$(1-r^n)+r^n(1-r^n)(1-r^{n-1})+r^{2n}(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})\ldots$$
$$\ldots.+r^{n(n-1)}(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots.(1-r)$$
$$=1+\sum_1^n(-1)^i r^{\frac{1}{2}(3i-1)(2n-i)}+\sum_1^{n-1}(-1)^i r^{\frac{1}{2}i(6n-3i-1)}$$
$$=1-r^{2n-1}-r^{3n-2}+r^{5n-5}+r^{6n-7}-r^{8n-12}-\ldots.+(-1)^n r^{\frac{1}{2}(3nn-n)}.$$

Dieselbe Formel erhält man auch aus XII. *b.*, sowohl wenn man $m=2n-1$, als wenn man $m=2n+1$ setzt.

Setzt man immer $z=r^n$, $q=r^{-1}$, so bleibt, wenn nur $n<m$ genommen wird, der Werth von $f_m(z)$ derselbe, wie in der vorstehenden Formel XIII.,

$$(1-r^n)+r^n(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots.+r^{n(n-1)}(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots.(1-r).$$

Es mufs daher auch die rechte Seite in XII. *a.* und *b.*, wenn man darin $z=r^n$, $q=r^{-1}$ setzt, für alle Werthe von m, welche $>n$ sind, denselben Werth behalten.

Für $z<1$ und $m=\infty$ erhält man aus XII. die Formel

XIV. $$(1-z)+z(1-z)(1-qz)+z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z)+\text{ etc. in inf.}$$
$$=1-qz^2-q^2z^3+q^5z^3+q^7z^6-q^{12}z^8-q^{15}z^9+\text{ etc. in inf.}$$
$$=1+\sum_1^\infty(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1}+\sum_1^\infty(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i}.$$

Setzt man in XII. zuerst $z=1$ und dann $m=\infty$, so erhält man die *Eulersche* Formel X.

Ich will bei dieser Gelegenheit die beiden Formeln beweisen, welche ich in meinen *Fundamentis* S. 186 9), 10) ohne Beweis mitgetheilt habe.

Es sei

$$\varphi(z)=1-\frac{q(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\ldots.$$
$$+\frac{z}{q}\left\{q-\frac{q^4(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^{16}(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\ldots.\right\}.$$

Da

$$\frac{1-q^{2m}z^2}{1-q^{2m+2}}-\frac{z}{q}=\frac{(1+q^{2m+1}z)(1-q^{-1}z)}{1-q^{2m+2}},$$
$$q^{mm}+q^{(m+1)^2}.\frac{z}{q}=q^{mm}(1+q^{2m}z),$$

so kann man die Function $\varphi(z)$ noch auf folgende beide Arten darstellen,

$$\varphi(z) = 1 - \frac{q(1+qz)(1-q^{-1}z)}{1-q^2} + \frac{q^4(1-z^2)(1+q^3z)(1-q^{-1}z)}{(1-q^2)(1-q^4)}$$
$$- \frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1+q^5z)(1-q^{-1}z)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots,$$
$$= 1 + z - \frac{q(1-z^2)(1+q^2z)}{1-q^2} + \frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)(1+q^4z)}{(1-q^2)(1-q^4)}$$
$$- \frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)(1+q^6z)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots,$$

woraus

$$\varphi(z) = (1+z)\varphi(qz)$$

folgt. Diese Gleichung giebt

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(qz)} \cdot \frac{\varphi(qz)}{\varphi(q^2z)} \cdot \frac{\varphi(q^2z)}{\varphi(q^3z)} \cdot \ldots \text{ in inf.}$$
$$= (1+z)(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\ldots.$$

Für $z = 1$ reducirt sich die vorgelegte Function $\varphi(z)$ auf 2. Es wird daher, wenn man die vorstehende Gleichung durch

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} = \frac{1}{\varphi(0)} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots.$$

dividirt,

$$\varphi(z) = \frac{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\ldots.}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.}.$$

Setzt man in diesem und dem oben für $\varphi(z)$ angegebnen Ausdrucke $-z$ für z, und nimmt die halbe Summe und Differenz von $\varphi(z)$ und $\varphi(-z)$, so erhält man die beiden in den ***Fundamentis*** gegebnen Formeln. Für $z = -q$ giebt dieselbe Formel die Entwicklung

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots.}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \text{ etc.}$$

Für $z = 0$ erhält man

$$\frac{1}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.}$$
$$= 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots.$$

Aus der von ***Euler*** in der ***Introductio*** (Cap. XVI. §. 313.) gegebnen Formel

$$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots.} = 1 + \frac{qz}{1-q} + \frac{q^2z^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3z^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots.$$

würde man für dieselbe Gröfse den Ausdruck

$$1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \text{ etc.}$$

erhalten.

Berlin, den 12. Mai 1846.

16.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite,

par M. *C. G. J. Jacobi.*

„Berlin, le 6 août 1845.

„... Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse que j'ai publiées sans démonstration dans le Journal de M. ***Crelle,*** sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules. Ensuite, j'avais fait une espèce de tour de force en prouvant ces formules par la substitution même des expressions si compliquées de radicaux faite dans l'équation différentielle à laquelle elles doivent satisfaire. Pour mieux faire saisir l'esprit de cette dernière démonstration en quelque sorte synthétique, j'ai commencé par publier une application de la même méthode à la démonstration des formules de la transformation directe, dans un Mémoire imprimé dans le Journal de M. ***Crelle,*** tome VI, pages 397 et suivantes. Plus tard, je suis parvenu à une troisième démonstration qui repose entièrement sur la décomposition de $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ en fractions simples, pour laquelle j'ai établi les formules dans une de mes Leçons données à l'Université de Koenigsberg.

„Quant aux formules de développement du produit

$$H(x+a_1)\,H(x+a_2)\,\ldots\,H(x+a_n),$$

où

$$a_1+a_2+\ldots a_n = 2jk,$$

et des fonctions homogènes de $H(x)$ et $\Theta(x)$, je les avais d'abord, comme vous, déduites des propriétés analytiques et caractéristiques des fonctions Hx et Θx, et j'y ai fait allusion dans le Journal de M. ***Crelle,*** tome XXVI, page 103. Depuis, j'ai remarqué que l'on peut parvenir aux mêmes formules par la considération élémentaire et algébrique, qu'étant mis

$$y_1 = x_1+b, \quad y_2 = x_2+b, \quad \text{etc.}$$

à chaque solution des deux équations

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = p, \qquad x_1+x_2+\ldots+x_n = a,$$

répond une solution des deux autres équations

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 = p-\frac{a^2}{n}+n\left(\frac{a}{n}+b\right)^2,$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n = a+nb.$$

On mettra pour a les nombres 0, 1, 2, ..., $n-1$, et pour b tous les nombres, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

„Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très-originale de faire ressortir de ces mêmes principes le théorème d'*Abel*, tant qu'il s'applique aux fonctions elliptiques. Ne pensez-vous pas consacrer un Mémoire particulier à cette matière qui se détache très-bien des autres questions?

„En cherchant à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.

„Dans mes Leçons universitaires de Koenigsberg, moi aussi j'ai eu coutume de partir des fonctions Θ. Dans ces Leçons, en multipliant quatre séries $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i e^{-(ax+bi)^2}$ pour différentes valeurs de x, et en transformant les exposants par la formule

$$i^2+i'^2+i''^2+i'''^2 = \left(\frac{i+i'+i''+i'''}{2}\right)^2+\left(\frac{i+i'-i''-i'''}{2}\right)^2+\text{etc.},$$

j'ai obtenu tout de suite une formule de laquelle découlent, comme cas particuliers et sans le moindre calcul, les expressions fractionnaires des fonctions elliptiques, les théorèmes sur l'addition des trois espèces, et plusieurs centaines de formules intéressantes auxquelles on ne saurait arriver que par un calcul algébrique fatigant. Dans un des premiers volumes du Journal de M. *Crelle*, j'ai donné des formules d'addition et de transformation conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux Θ. Ces formules font voir que l'on peut arriver par deux transformations successives, non-seulement à la multiplication, mais encore aux formules de l'addition.

„Dans les mêmes Leçons, j'ai examiné l'ensemble des différentes formes que peut prendre une même fonction Θ. En faisant usage de la méthode employée par *Lagrange* pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, q étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours, et par la seule multiplication par une quantité de la forme e^{rxx}, ramener la fonction Θ à une autre où le module de q, ce mot pris dans le sens de M. *Cauchy*, soit $< e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. C'est une limite précise, c'est à dire qu'étant prise une quantité inférieure, il y aura toujours des cas, où le module de q dans toutes les formes que pourrait prendre la fonction Θ restera supérieure à cette quantité.

„L'addition des paramètres dans la troisième espèce des intégrales abéliennes et l'échange des paramètres avec les amplitudes me sont bien connues. Il y a douze années environ que je les ai communiquées à deux de mes élèves, M. ***Richelot,*** de Koenigsberg, et M. ***Senff,*** à présent professeur de mathématiques près l'Université de Dorpat, et qui étudiait à Koenigsberg lorsque je trouvai ces formules. J'avais d'abord prouvé l'addition des paramètres, indépendamment, par la seule différentiation de $\log\frac{\sqrt{R}+U\sqrt{x}}{\sqrt{R}-U\sqrt{x}}$, U et R étant deux fonctions de l'ordre m et $2m$. Puis je l'ai déduite de l'échange mutuel des paramètres et amplitudes, qui se trouve aisément en remplaçant la somme des deux intégrales simples

$$\int_0^x \frac{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}\cdot dx}{(x-\alpha)\sqrt{(xR(x))}} + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{(xR(x))}\cdot d\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

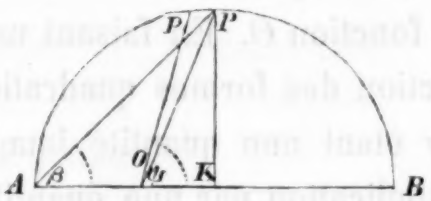
par la double intégrale

$$\iint \frac{dx\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}\sqrt{(xR(x))}}\left[\frac{1}{2(x-\alpha)}\left(\frac{d\cdot xR(x)}{dx}+\frac{d\cdot \alpha R(\alpha)}{d\alpha}\right)+\frac{\alpha R(\alpha)-xR(x)}{(x-\alpha)^2}\right],$$

où l'on prouve sans peine que la fonction de x et de α, placée entre les grands crochets, est entière. Depuis, j'ai appris par les Oeuvres posthumes d'***Abel*** qu'elle est la généralisation dont ces théorèmes sont susceptibles.

„Feuilletant mes anciens papiers, j'y ai trouvé la démonstration de quelques théorèmes par lesquels on donne aux formules d'addition des intégrales abéliennes de la seconde et de la troisième espèce une forme analogue à celle sous laquelle les formules d'addition des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce ont été présentées par ***Legendre,*** ce qui contribue à rendre de plus en plus parfaite l'analogie entre les fonctions abéliennes et elliptiques *).

Permettez-moi d'ajouter une construction géométrique de la transformation dite de ***Landen,*** la première qui ait été connue des fonctions elliptiques.



Soit AB le diamètre d'un cercle: si l'on mène d'un point P du cercle la droite PK au centre K, l'angle PKB est double de PAB, mais si l'on mène

*) La démonstration de ces théorèmes a été publiée dès l'envoi de cette lettre dans le Journal de M. *Crelle* V. XXX pg. 121.

la droite à un autre point fixe O du diamètre, on obtient l'angle dans lequel par la transformation de *Landen* se change l'amplitude PAB d'une intégrale elliptique dont le complément du module est $\frac{AO}{BO}$, le module transformé étant $\frac{KO}{KA}$. En effet soit R le rayon du cercle, $KO = a$, $PAB = \beta$, $POB = \psi$; variant P, on aura dans le triangle infiniment petit POP,

$$PP \sin PPO = OP \sin POP;$$

donc

$$2R\,d\beta \cdot \cos KPO = OP \cdot d\psi, \quad \frac{2d\beta}{OP} = \frac{d\psi}{R\cos KPO};$$

or

$$OP^2 = R^2 + a^2 + 2Ra\cos 2\beta = (R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta,$$
$$R^2\cos^2 KPO = R^2 - R^2\sin^2 KPO = R^2 - a^2\sin^2\psi;$$

donc

$$\frac{2d\beta}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta]}} = \frac{d\psi}{\sqrt{[R^2\cos^2\psi + (R^2-a^2)\sin^2\psi]}}.$$

On a, en même temps,

$$\sin\psi = \frac{AP\cdot\sin\beta}{OP} = \frac{2R\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta]}},$$

ce qui est la substitution de *Landen*.

„Je suis aussi parvenu à étendre au théorème d'*Abel* ma construction de l'addition des fonctions elliptiques. Dans cette dernière, la corde PQ d'un cercle touche constamment un autre cercle. Soit T le point d'intersection

de deux positions consécutives de la droite; les deux angles QQT et PPT étant égaux d'après une propriété du cercle, on aura

$$\frac{PP}{PT} = \frac{QQ}{QT},$$

ce qui est l'équation différentielle, dont par la construction de la droite inscrite à l'un et circonscrite à l'autre cercle on trouve l'intégrale complète et algébrique, la même qui a été donnée par *Euler*. A présent, je suppose qu'une corde C d'une courbe I du $n^{\text{ième}}$ degré touche constamment une autre courbe II. Soient P un point d'intersection de la corde mobile avec la courbe I, et $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ l'élément de la courbe I dans ce point, T le point de contact de la corde C avec la courbe II; si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe I, je démontre, par des considérations mixtes de géométrie et d'algèbre,

la formule générale

$$\Sigma \frac{\psi(x,y)\,ds}{PT\cdot\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}} = 0,$$

$\psi(x, y)$ étant une fonction entière quelconque de x et y de l'ordre $n-2$, et la somme s'étendant aux n points d'intersection, le signe du radical étant $+$ ou $-$, selon que ces points sont de l'un ou de l'autre côté de T. Supposons en particulier que la courbe I rentre dans ces courbes pour les points desquelles on peut exprimer x et y par des fractions dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des fonctions entières d'une troisième variable t, $x=\frac{\tau_1}{\tau}$, $y=\frac{\tau_2}{\tau}$, τ, τ_1, τ_2 étant du $n^{\text{ième}}$ degré, ce qui même pourra toujours se faire pour les courbes du premier et du second degré. Faisant usage de divers théorèmes établis dans mon Mémoire sur l'élimination (Journal de M. *Crelle*, tome XV), je trouve que, $\beta(t)$ étant une fonction quelconque de t du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, on aura

$$\frac{\beta(t)}{\tau}\,dt = \frac{\psi(x,y)\,ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}},$$

$\psi(x, y)$ étant, comme ci-dessus, du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré. On aura donc

$$\Sigma \frac{\beta(t)\,dt}{\tau\cdot PT} = 0.$$

Soit la courbe II un cercle ayant pour équation $x^2+y^2=1$; on aura

$$\tau\cdot PT = \sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)},$$

donc

$$\Sigma \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)}}=0, \quad \text{d'où} \quad \Sigma\int \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)}}=0,$$

les n intégrales étant prises entre les limites correspondantes aux intersections de la courbe I avec deux tangentes quelconques du cercle. Soit $f(t)$ une fonction donnée du $(2p)^{\text{ième}}$ degré, prenons trois fonctions entières de t quelconques, $\Psi(t)$, U, τ_1, respectivement du $(p-2)^{\text{ième}}$, $(n-p)^{\text{ième}}$, $n^{\text{ième}}$ degré, déterminons deux autres fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré, τ et τ_2, au moyen de la formule,

$$\tau_1^2 - U^2 f(t) = \tau^2 - \tau_2^2,$$

et supposons enfin, que dans l'équation-somme trouvée on ait $\beta(t)=U\Psi(t)$ et que les limites des intégrales correspondent aux intersections de la courbe I

avec les deux tangentes du cercle parallèles à l'axe des x, on aura l'équation-somme,

$$\Sigma \int \frac{\Psi(t)\,dt}{\sqrt{f(t)}} = 0,$$

les limites des n intégrales étant les racines de l'équation

$$\tau^2 - \tau_2^2 = \tau_1^2 - U^2 f(t) = 0,$$

ce qui est le théorème d'*Abel*. Mais la forme sous laquelle ce théorème se présente, d'après la construction précédente, ne semble pas dépourvue d'intérêt. Comme je n'ai étudié avec soin que les intégrales qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconques I et II, comporte la même généralité que le théorème général d'*Abel*. Par vos travaux sur ce théorème pris dans toute sa généralité, vous serez mieux que moi à même d'en juger.

„Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtez commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre..."

17.

Geometrische Lehrsätze.

(Von Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 27. Nov. 1845 in der Akad. der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.)

---

1. „***Eine Curve dritter Ordnung enthält im Allgemeinen 27 solche Puncte P, in deren jedem sie von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt werden kann. Von diesen 27 Puncten sind 9 reell und 18 imaginär. Die Gleichung vom 27sten Grade, durch welche die 27 Puncte P bestimmt werden, ist immer algebraisch aufzulösen; was für die Algebra selbst von Interesse ist.***"

Von den 27 Puncten ***P*** liegen 108mal drei in einer Geraden, und diese 108 Geraden haben wiederum eigenthümliche Beziehungen, sowohl unter sich, als zu andern von der Curve abhängigen ausgezeichneten Geraden und Puncten. So z. B. liegen von den 9 reellen Puncten ***P*** neunmal drei in einer Geraden, und von diesen 9 Geraden schneiden sich bestimmte 3, die sich wesentlich von den 6 übrigen unterscheiden, in demselben Puncte ***Q***. Solcher Puncte ***Q*** giebt es im Ganzen 12, wofern alle 27 Puncte ***P*** in Betracht gezogen werden, und diese 12 Puncte ***Q*** haben nebstdem noch andere merkwürdige Beziehungen zu der Curve; etc. etc.

2. Werden in einer Curve dritter Ordnung zwei beliebige Puncte ***P*** und ***Q*** als fest angenommen, wird ferner in derselben ein willkürlicher Punct ***A*** angenommen und die Gerade ***PA*** gezogen, welche der Curve zum dritten Male in einem Puncte ***B*** begegnet, wird sodann weiter die Gerade ***QB*** gezogen, welche die Curve zum dritten Male in einem Puncte ***C*** schneidet, wird ferner die Gerade ***PC*** gezogen, welche die Curve in einem neuen Puncte ***D*** trifft, und werden so weiter die Geraden ***QDE, PEF, QFG,*** .... gezogen, welche nach der Reihe in der Curve die neuen Puncte ***E, F, G,*** .... bestimmen, so entsteht ein der Curve eingeschriebenes Polygon ***ABCDEFG*** ...., dessen Seiten der Reihe nach abwechselnd durch die festen Fundamentalpuncte ***P*** und ***Q*** gehen, und welches entweder 1° sich ***nicht schliefst,*** wie lange auch die Construction fortgesetzt werden mag, oder 2° sich ***schliefst*** und dann eine gerade Zahl $2n$ von Seiten hat. Im letztern Falle findet folgender Satz statt:

„Wenn das Polygon sich schliefst, so schliefst es sich immer und hat stets die nämliche Seitenzahl $2n$, man mag die erste Ecke A desselben in der Curve annehmen, wo man will."

Zieht man die Grade PQ, welche die Curve in einem dritten Puncte R schneidet, legt aus R eine Tangente an die Curve und nennt den Berührungspunct S, so hat man folgenden Satz:

„Wenn den Fundamentalpuncten P und Q ein geschlossenes Polygon von $2n$ Seiten entspricht, so entspricht sowohl den Puncten P und S, als den Puncten Q und S, als Fundamentalpuncten, ein Polygon von $4n$ Seiten."

Kennt man also zwei Fundamentalpuncte P und Q, denen ein geschlossenes Polygon von $2n$ Seiten entspricht, so ist es hiernach leicht, zwei solche Fundamentalpuncte (P und S oder Q und S) zu erhalten, denen ein Polygon von doppelter Seitenzahl $4n$ entspricht; und auch umgekehrt.

In einer gegebenen Curve dritter Ordnung giebt es immer unendlich viele Paare Fundamentalpuncte P und Q, denen ein geschlossenes Polygon von vorgeschriebener gerader Seitenzahl entspricht. Man kann sogar den einen Punct willkürlich annehmen und dann kann der andere noch in mehrfachen Lagen der Forderung genügen.

Solche Punctenpaare, denen geschlossene Polygone entsprechen, werden durch den Satz selbst näher bestimmt und sind für die einfachern Polygone an folgenden Merkmalen zu erkennen.

a) Soll das Polygon ein *Viereck* sein, so müssen die Tangenten in P und Q einander in irgend einem Puncte T auf der Curve treffen. In diesem besondern Falle ist es also leicht, geeignete Fundamentalpuncte P und Q zu finden. Auch folgt daraus, dafs wenn P in der Curve beliebig angenommen wird, dann Q in drei verschiedenen Lagen der Forderuug genügen kann. Ferner folgt daraus, wie Fundamentalpuncte P und S zu finden sind, denen ein geschlossenes Achteck entspricht, und dafs, wenn P gegeben ist, dann S, im Allgemeinen, in 12 verschiedenen Lagen der Forderung genügen kann; etc.

b) Soll das Polygon ein *Sechseck* sein, so müssen, wenn die Tangenten in P und Q die Curve beziehlich in P_1 und Q_1 schneiden, die Geraden PQ_1 und QP_1 einander in irgend einem Puncte T auf der Curve schneiden. — Hier tritt der besondere Umstand ein, dafs sowohl P und T, als Q und T ebenfalls Fundamentalpuncte für das Sechseck sind. Und schneidet die Tangente in T die Curve im Puncte T_1, so genügen auch je zwei der drei

Puncte P_1, Q_1, T_1 zu gleichem Zwecke; u. s. w. — In diesem Falle genügen insbesondere auch je zwei Wendungspuncte der Curve als Fundamentalpuncte. Zudem sind durch Hülfe der Wendungspuncte alle Paare Fundamentalpuncte für das Sechseck leicht zu bestimmen. Sind U und V zwei Wendungspuncte, ist x ein willkürlicher anderer Punct der Curve und zieht man die Geraden XU und XV, so sind ihre dritten Schnittpuncte mit der Curve allemal ein Paar Fundamentalpuncte P und Q, denen ein Sechseck entspricht. Man schliefst hieraus, dafs wenn der eine Fundamentalpunct P beliebig angenommen wird, dann der andere Q in 8 verschiedenen Lagen der Forderung genügen kann; ist P reell, so sind von den 8 Puncten Q nur 2 reell, 6 imaginär; etc.

c) Soll das Polygon ein ***Zehneck*** sein, so müssen P und Q solche Lage haben, dafs wenn die Tangenten in denselben die Curve in P_1 und Q_1 schneiden, ferner die Geraden PQ_1 und QP_1 der Curve in P_2 und Q_2 begegnen, weiter die Geraden PQ_2 und QP_2 dieselbe in P_3 und Q_3 treffen: dafs dann endlich die Geraden PQ_3 und QP_3 die Curve im nämlichen Puncte T scheiden.

3. Hat eine Curve vierter Ordnung zwei Doppelpuncte P und Q, so lassen sich ihr gleicherweise Polygone $ABCDEF\ldots$ einschreiben, deren Seiten abwechselnd durch jene festen Puncte P und Q gehen und es findet dasselbe Gesetz statt:

„Dafs wenn das Polygon sich schliefst, es sich dann immer schliefst und dabei stets die nämliche gerade Seitenzahl $2n$ hat, man mag die erste Ecke A desselben in der Curve annehmen, wo man will.“ Etc.

Bemerkung. Die vorstehenden Sätze (2. und 3.) finden analogerweise statt, wenn die Seiten des Polygons Kegelschnitte sind (anstatt Gerade); nämlich wenn man in der gegebenen Curve drei beliebige feste Puncte X, Y, Z annimmt, durch dieselben und abwechselnd durch P und Q Kegelschnitte legt und mittels solcher Kegelschnitte das der Curve eingeschriebene Polygon construirt. Etc.

18.

Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höhern Transcendenten.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

1.

Unter den hinterlafsnen Arbeiten *Abels* finden sich zwei kleine Aufsätze, der 9te und 10te im 2ten Bande seiner gesammelten Werke, in welchen die Sätze, welche *Legendre* über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale gefunden hat, zu einer grofsen Allgemeinheit erhoben sind. Ich will hier diese Arbeiten *Abels* reproduciren, um sie durch eine etwas abweichende Darstellung vielleicht in ein besseres Licht zu setzen.

In der ersten der beiden Abhandlungen, welche den Titel führt: „*Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*" (S. 54—57 am angef. O.), beweist *Abel* ein Theorem, welches mit dem folgenden übereinkommt:

„Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Function von x; es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei beliebige andre ganze rationale Functionen von x, deren Summe

$$f_1(x)+f_2(x)=\frac{df(x)}{dx};$$

man setze ferner

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx}=\frac{f_1(x)}{f(x)}, \qquad \frac{d\log\psi(x)}{dx}=\frac{f_2(x)}{f(x)},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}-\psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

ein Aggregat von Producten von der Form

$$C_{m,n}\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n\,dx}{\varphi(x)},$$

wo m und n ganze positive Zahlen und die Gröfsen $C_{m,n}$ Constanten sind."

Der vorgelegte Ausdruck, welchen ich mit

$$H = \varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

bezeichnen will, kann folgendermafsen dargestellt werden,

$$H = \iint\left(\frac{d\log\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha\,dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}$$
$$-\iint\left(\frac{d\log\psi(x)}{dx} + \frac{1}{\alpha-x}\right)\frac{\psi(x)\,d\alpha\,dx}{(\alpha-x)\psi(\alpha)},$$

oder da in Folge der Gleichungen, durch welche die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ definirt wurden, ihr Product

$$\varphi(x)\psi(x) = f(x)$$

wird, durch die Formel

$$H = \iint\frac{f(\alpha)+(x-\alpha)f_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx - \iint\frac{f(x)+(\alpha-x)f_2(x)}{(\alpha-x)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx$$
$$= \iint\frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)+f_2(x)\}}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx.$$

Setzt man $\frac{df(x)}{dx} - f_1(x)$ für $f_2(x)$, so wird der Zähler des Bruchs unter dem doppelten Integralzeichen

$$f(\alpha) - f(x) - (\alpha-x)\frac{df(x)}{dx} + (x-\alpha)\{f_1(\alpha) - f_1(x)\}.$$

Dieser Ausdruck, wie man sogleich sieht, geht durch $(x-\alpha)^2$ auf. Ich will den Quotient, welcher eine ganze rationale Function der Gröfsen x und α ist, mit

$$\Sigma C_{m,n}\alpha^m x^n = \frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)+f_2(x)\}}{(x-\alpha)^2}$$

bezeichnen, wo die Gröfsen $C_{m,n}$ von α und x unabhängige Constanten sind. Durch Substitution dieses Ausdrucks verwandelt sich der für H gefundne Werth in

$$H = \Sigma C_{m,n}\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n\,dx}{\varphi(x)},$$

was der zu beweisende Satz ist.

Entwickelt man die Brüche $\frac{-f(x)}{(x-\alpha)^2} + \frac{f_2(x)}{x-\alpha}$ nach absteigenden Potenzen von x, so wird $C_{m,n}$ der Coëfficient von $\alpha^m x^n$ in dieser Entwicklung, da aus den beiden andern Termen des für $\Sigma C_{m,n}\alpha^m x^n$ angegebnen Ausdrucks nur negative Potenzen von x hervorgehen. Setzt man

$$f_1(x) = \Sigma a_1^{(i)}x^i, \quad f_2(x) = \Sigma a_2^{(i)}x^i, \quad f(x) = c + \Sigma\frac{1}{i+1}(a_1^{(i)}+a_2^{(i)})x^{i+1},$$

wo c eine Constante ist, so ergiebt sich auf diese Weise

$$C_{m,n} = \frac{-(m+1)}{m+n+2}(a_1^{(m+n+1)} + a_2^{(m+n+1)}) + a_2^{(m+n+1)}$$
$$= \frac{-1}{m+n+2}\{(m+1)a_1^{(m+n+1)} - (n+1)a_2^{(m+n+1)}\}.$$

Über die Gränzen der Integration ist folgendes zu bemerken.

Damit, wie gesetzt worden,

$$\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha} = \int d\cdot\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha,$$

mufs das Integral von einem solchen Werthe von α an genommen werden, für welchen $\varphi(\alpha)$ verschwindet, und eben so mufs in der Gleichung

$$\frac{\psi(x)}{\alpha-x} = \int d\cdot\frac{\psi(x)}{\alpha-x}\,dx$$

das Integral von einem solchen Werthe von x an genommen werden, für welchen $\psi(x)$ verschwindet. Aufserdem aber dürfen die Intervalle, über welche in Bezug auf α und x integrirt wird, keinen Werth mit einander gemein haben, oder es darf kein Werth, den α während der Integration annehmen kann, mit einem Werthe, den x während der Integration annehmen kann, zusammenfallen, weil die Vertauschung der Ordnung der Integration, welche den obigen Betrachtungen zu Grunde liegt, nur dann allgemein zulässig ist, wenn die zu integrirende Function nicht in diesen Intervallen unendlich wird.

Es sei

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\mu_1}(x-\alpha_2)^{\mu_2}(x-\alpha_3)^{\mu_3}\ldots,$$

wo μ_1, μ_2, μ_3 etc. ganze positive Zahlen sind; man erhält dann

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)\,dx} = \frac{\mu_1}{x-\alpha_1} + \frac{\mu_2}{x-\alpha_2} + \frac{\mu_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.}$$

Man kann daher, wenn

$$\beta_i + \gamma_i = \mu_i,$$

für die Differentialquotienten von $\log\varphi(x)$ und $\log\psi(x)$ folgende Ausdrücke setzen:

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \frac{\beta_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.} + U,$$
$$\frac{d\log\psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x-\alpha_1} + \frac{\gamma_2}{x-\alpha_2} + \frac{\gamma_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.} - U.$$

Die Function U kann hier eine beliebige ganze rationale Function von x sein, und aufserdem noch für die verschiednen Werthe von i Aggregate von Brüchen

von der Form

$$\frac{\beta_i'}{(x-\alpha_i)^2}+\frac{\beta_i''}{(x-\alpha_i)^3}+\ldots.+\frac{\beta_i^{(\mu_i-1)}}{(x-\alpha_i)^{\mu_i}}.$$

enthalten. Dieses ist die allgemeinste Annahme, unter welcher die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen bleiben und ihre Summe $=\frac{df(x)}{dx}$ wird. Die Function $\int U dx$ wird daher immer eine rationelle, ganze oder gebrochne Function von x, deren Nenner nur die Factoren $x-\alpha_i$ hat, und jeden in einer niedrigern Potenz, als in der ihn $f(x)$ enthält. Es werden demnach in dem aufgestellten Theorem die allgemeinsten Formen, welche $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ annehmen können,

$$\varphi(x) = e^P (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots.,$$
$$\psi(x) = e^{-P}(x-\alpha_1)^{\gamma_1}(x-\alpha_2)^{\gamma_2}(x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots.,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und P eine rationale, ganze oder gebrochene Function, deren Nenner nur die Potenzen von $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ etc. als Factoren enthält, und zwar jedes $x-\alpha_i$ höchstens in die $(\beta_i+\gamma_i-1)^{\text{te}}$ Potenz erhoben.

Hieraus ergiebt sich das folgende Theorem.

Theorem I.

„Es sei

$$\varphi(x) = e^P (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots.,$$
$$\psi(x) = e^{-P}(x-\alpha_1)^{\gamma_1}(x-\alpha_2)^{\gamma_2}(x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots.,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und

$$P = \frac{Q}{(x-\alpha_1)^{\beta_1+\gamma_1-1}(x-\alpha_2)^{\beta_2+\gamma_2-1}(x-\alpha_3)^{\beta_3+\gamma_3-1}\ldots.},$$

wo Q eine beliebige ganze rationale Function von x ist; es seien ferner $a_1^{(i)}$ und $a_2^{(i)}$ die Coëfficienten von x^i in den ganzen rationalen Functionen

$$\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \quad \text{und} \quad \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}-\psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$
$$=\Sigma\left(\frac{n+1}{m+n+2}a_2^{(m+n+1)}-\frac{m+1}{m+n+2}a_1^{(m+n+1)}\right)\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n dx}{\varphi(x)},$$

wo die Integrationen in Bezug auf α und x von solchen Anfangsgränzen an zu nehmen sind, für welche $\varphi(\alpha)$ und $\psi(x)$ verschwinden."

Die von *Abel* (S. 56 oben) hinzugefügte Beschränkung, dafs die Exponenten β_1, γ_1 etc. positiv und kleiner als 1 sein müssen, ist nicht für alle wesentlich nothwendig. Wäre dies der Fall, so könnte, wie aus dem Vorigen erhellt, niemals P eine gebrochne Function sein, wie doch *Abel* annimmt. Soll in dem vorstehenden Theorem $\psi(x)$ dieselbe Function wie $\varphi(x)$ sein, so wird es die Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function, $\varphi(x) = \psi(x) = \sqrt{f(x)}$. In diesem Falle mufs immer P verschwinden. Setzt man für denselben Fall $\frac{1}{i+1} a_1^{(i)} = \frac{1}{i+1} a_2^{(i)} = b_{i+1}$, wo b_i der Coëfficient von x^i in $f(x)$ ist, so wird

$$C_{m,n} = (n-m)\, b^{(n+m+2)},$$

also $C_{m,m} = 0$.

2.

Ich komme jetzt zu der grofsen Ausdehnung, welche *Abel* dem schon so allgemeinen Theorem, welches im Vorigen bewiesen worden, gegeben hat (s. Abh. X. des 2ten Theiles seiner Werke S. 58 — 65). Zu dem näheren Verständnifs dieser Ausdehnung ist es nöthig, einige Sätze über lineäre Differentialgleichungen voranzuschicken.

Hat man einen Ausdruck

$$Ay + A_1 y' + A_2 y'' \ldots + A_n y^{(n)},$$

wo $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$ und A, A_1 etc. Functionen von x sind, so entspricht ihm immer ein andrer

$$Bz + B_1 z' + B_2 z'' \ldots + B_n z^{(n)}$$

in der Art, dafs für unbestimmte Functionen y und z der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1 y' + A_2 y'' \ldots + A_n y^{(n)}\} + y\{Bz + B_1 z' + B_2 z'' \ldots + B_n z^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differentiale wird. Diese Bedingung erfordert die Gleichung

$$By + B_1 y' + B_2 y'' \ldots + B_n y^{(n)} = -Ay + \frac{d.A_1 y}{dx} - \frac{d^2.A_2 y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_n y}{dx^n},$$

mittelst welcher der zweite Ausdruck aus dem gegebnen bestimmt wird, und durch dieselbe Bedingung wird auch auf ganz ähnliche Art der gegebne Ausdruck aus dem zweiten mittelst der Gleichnng

$$Ay + A_1 y' + A_2 y'' \ldots + A_n y^{(n)} = -By + \frac{d.B_1 y}{dx} - \frac{d^2.B_2 y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.B_n y}{dx^n}$$

bestimmt. Ich werde mit $[y]_1$ und $[y]_2$ die Ausdrücke

$$[y]_1 = Ay + A_1 y' + A_2 y'' \ldots + A_n y^{(n)} = -By + \frac{d.B_1 y}{dx} - \frac{d^2.B_2 y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.B_n y}{dx^n},$$

$$[y]_2 = By + B_1 y' + B_2 y'' \ldots + B_n y^{(n)} = -Ay + \frac{d.A_1 y}{dx} - \frac{d^2.A_2 y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_n y}{dx^n}$$

bezeichnen, und das Integral

$$\int (z[y]_1 + y[z]_2)\,dx = [y,z]$$

setzen. Wenn man in den Functionen A, A_1 etc., B, B_1 etc. für die unabhängige Variable x eine andre einführt und nach dieser differentiirt, so werde ich dieselbe den Klammern oben rechts beifügen.

Wenn z eine Lösung der Gleichung

$$[z]_2 = 0,$$

y eine beliebige Function ist, so folgt aus der vorstehenden Formel,

$$\int z[y]_1\,dx = [y,z],$$

und eben so, wenn y eine Lösung der Gleichung

$$[y]_1 = 0,$$

z aber eine beliebige Function ist,

$$\int y[z]_2\,dx = [y,z].$$

Wenn y und z gleichzeitig Lösungen der Gleichungen

$$[y]_1 = 0, \quad [z]_2 = 0$$

sind, so wird $[y,z]$ einer Constante gleich.

Es seien A, A_1 etc. ganze rationale Functionen von x, so werden auch B, B_1 etc. ganze rationale Functionen von x sein. Nennt man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ etc. die Functionen von α, welche aus A, A_1 erhalten werden, wenn man α für x substituirt, und setzt

$$\frac{A-\mathfrak{A}}{x-\alpha} = P, \quad \frac{A_1-\mathfrak{A}_1}{x-\alpha} = P_1, \quad \ldots \quad \frac{A_n-\mathfrak{A}_n}{x-\alpha} = P_n,$$

so werden P, P_1 etc. ganze rationale Functionen der beiden Gröfsen x und α. Substituirt man in

$$[y]_2 = -Ay + \frac{d.A_1y}{dx} - \frac{d^2.A_2y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_ny}{dx^n}$$

für y den Bruch $\frac{1}{x-\alpha}$, und setzt statt der Differentiationen von $\frac{1}{x-\alpha}$ nach x die nach α, abwechselnd mit entgegengesetztem Zeichen genommen, so erhält man

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2 = -\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} - P + \frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2P_2}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^nP_n}{dx^n}.$$

Es wird daher

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)}$$

eine ganze rationale Function von x und α. Ich will diese ganze rationale Function von x und α mit U bezeichnen. Setzt man

$$\mathfrak{A}_m^{(i)} = \frac{d^i\mathfrak{A}_m}{d\alpha^i},$$

so wird

$$1.\quad U = \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)}$$
$$= \frac{\mathfrak{A}+B}{x-\alpha} + \frac{\mathfrak{A}_1 - B_1}{(x-\alpha)^2} + \Pi 2 \cdot \frac{\mathfrak{A}_2 + B_2}{(x-\alpha)^3} \ldots + \Pi n \cdot \frac{\mathfrak{A}_n + (-1)^n B_n}{(x-\alpha)^{n+1}}.$$

Ist

$$U = \Sigma C_{m,p}\, \alpha^m x^p,$$

wo m und p nur ganze positive Werthe annehmen, so ergiebt sich $C_{m,p}$ aus (1.) auf doppelte Art, nämlich als Coëfficient von x^p in dem Ausdrucke

$$\frac{B}{x^{m+1}} - (m+1)\frac{B_1}{x^{m+2}} + (m+1)(m+2)\frac{B_2}{x^{m+3}} \ldots \pm (m+1)(m+2)\ldots(m+n)\frac{B_n}{x^{m+n+1}}$$
$$= [x^{-m-1}]_2,$$

oder als Coëfficient von α^m in dem Ausdrucke

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\alpha^{p+1}} + (p+1)\frac{\mathfrak{A}_1}{\alpha^{p+1}} - (p+1)(p+2)\frac{\mathfrak{A}_2}{\alpha^{p+2}} \ldots \mp (p+1)(p+2)\ldots(p+n)\frac{\mathfrak{A}_n}{\alpha^{p+n+1}}$$
$$= [\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}\ *).$$

Die Identität dieser beiden für $C_{m,p}$ gefundnen Darstellungen folgt auch unmittelbar aus der Betrachtung, dafs in $x^{-m-1}[x^{-p-1}]_1 + x^{-p-1}[x^{-m-1}]_2$, als dem Differential des Ausdrucks $[x^{-p-1}, x^{-m-1}]$, welcher aus blofsen Potenzen von x besteht, der Term $\frac{1}{x}$ nicht vorkommen kann.

Ich multiplicire die Gleichung (1.) mit

$$\frac{d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)\varphi(x)},$$

---

*) Setzt man

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+i)} A_i + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+i)} B_i = M_i,$$

wo $\nu = m+p+1$, so führt die Vergleichung der beiden obigen Bestimmungen von $C_{m,p}$ auf die Gleichung

$$M - \frac{dM_1}{dx} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n M_n}{dx^n} = 0,$$

welche man mittelst der bekannten Formel

$$1 - k_1 \frac{m+1}{\nu+1} + k_2 \frac{(m+1)(m+2)}{(\nu+1)(\nu+2)} - k_3 \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+2)} \ldots \pm \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}$$
$$= \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)},$$

wo $k_i = \frac{k(k-1)\ldots(k+i-1)}{1.2\ \ldots\ i}$, verificirt. Es wird daher der Ausdruck

$$My + M_1 y' + M_2 y'' \ldots + M_n y^{(n)}$$

ein vollständiges Differential.

wo $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ respective Lösungen der Gleichungen

$$\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]_1^{(x)} = 0, \quad \left[\frac{1}{\psi(\alpha)}\right]_2^{(\alpha)} = 0$$

sein sollen, und integrire nach α und x. Man erhält aber zufolge der obigen Formeln

$$\int \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} \frac{dx}{\varphi(x)} = \left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)},$$

$$\int \left[\frac{1}{\alpha-x}\right]_1^{(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)},$$

und daher

$$2. \quad \int \left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} - \int \left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} \frac{dx}{\varphi(x)} = \iint \frac{U\,d\alpha\,dx}{\psi(\alpha)\,\varphi(x)}.$$

In der Formel (2.) sind die beiden Ausdrücke $[y, z]$ so beschaffen, dafs y eine Lösung der Gleichung $[y]_1 = 0$ oder z eine Lösung der Gleichung $[z]_2 = 0$ ist. Für diese Fälle kann man Folgendes bemerken.

Es seien $y_1, y_2, \ldots y_n$ die n Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, und $z_1, z_1, \ldots z_n$ die n Lösungen der Gleichung $[z]_2 = 0$, so sind die nn Ausdrücke $[y_i, z_k]$ Constanten gleich. Da man für $z_1, z_2, \ldots z_n$ beliebige lineäre Functionen derselben, deren Coëfficienten constant sind, einführen kann, so kann man sich diese constanten Coëfficienten so bestimmt denken, dafs die Ausdrücke

$$[y_i, z_i] = 1,$$

dagegen wenn i und k verschieden sind, die Ausdrücke

$$[y_i, z_k] = 0$$

sind. Mittelst dieser Bedingungen sind für gegebne Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$, und umgekehrt für gegebne Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ vollkommen bestimmt. Hat man nämlich für eine beliebige Function z die n Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots \quad [y_n, z] = r_n,$$

welches n lineäre Gleichungen zwischen $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ sind, so folgt

$$\begin{aligned}
z &= z_1 r_1 + z_2 r_2 \ldots + z_n r_n, \\
z' &= z_1' r_1 + z_2' r_2 \ldots + z_n' r_n, \\
z'' &= z_1'' r_1 + z_2'' r_2 \ldots + z_n'' r_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z^{(n-1)} &= z_1^{(n-1)} r_1 + z_2^{(n-1)} r_2 \ldots + z_n^{(n-1)} r_n,
\end{aligned}$$

indem man sogleich sieht, dafs durch die Substitution dieser Werthe den

n Gleichungen Genüge geschieht. Eben so erhält man für eine beliebige Function y aus den n Gleichungen

$$[y, z_1] = s_1, \quad [y, z_2] = s_2, \quad \ldots\ldots \quad [y, z_n] = s_n$$

die Werthe

$$\begin{aligned} y &= y_1 s_1 + y_2 s_2 \ldots + y_n s_n, \\ y' &= y'_1 s_1 + y'_2 s_2 \ldots + y'_n s_n, \\ y'' &= y''_1 s_1 + y''_2 s_2 \ldots + y''_n s_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= y_1^{(n-1)} s_1 + y_2^{(n-1)} s_2 \ldots + y_n^{(n-1)} s_n. \end{aligned}$$

Setzt man in $r_i = [y_i, z]$ für z die Function von x, welche durch das Integral

$$z = \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)\psi(\alpha)}$$

gegeben ist, und $\frac{1}{\varphi(x)} = y_i$, so folgt aus (2.)

$$r_i = \int \left[y_i, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \int \left[\frac{1}{\alpha - x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} y_i\, dx + \iint \frac{y_i U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)},$$

und daher

$$z_1^{(i)} r_1 + z_2^{(i)} r_2 \ldots + z_n^{(i)} r_n = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)},$$

wenn man

$$Z^{(i)} = z_1^{(i)} \int \frac{y_1\, dx}{\alpha - x} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2\, dx}{\alpha - x} \ldots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n\, dx}{\alpha - x},$$

$$V^{(i)} = z_1^{(i)} \iint \frac{y_1 U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} + z_2^{(i)} \iint \frac{y_2 U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} \ldots + z_n^{(i)} \iint \frac{y_n U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)}$$

setzt. Man erhält daher durch die im Vorhergehenden zur Auflösung der Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots\ldots \quad [y_n, z] = r_n$$

gegebnen Formeln für die Functionen z, z', $\ldots\ldots$ $z^{(n-1)}$ die Werthe

$$z^{(i)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}\psi(\alpha)} = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)}.$$

Man setze in dieser Gleichung für $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ nach und nach $\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots \zeta_n$, wo ζ_k dieselbe Function von α sei, die z_k von x ist. Man bezeichne ferner die der Lösung $\frac{1}{\psi(\alpha)} = \zeta_k$ entsprechenden Werthe von $V^{(i)}$ mit $V_k^{(i)}$, so hat man

$$[Z^{(i)}, \zeta_k]^{(\alpha)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{\zeta_k\, d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} - V_k^{(i)}.$$

Setzt man hierin für k die Werthe $1, 2, \ldots n$, so erhält man n lineäre Gleichungen zwischen den Gröfsen

$$Z_i, \quad \frac{dZ_i}{d\alpha}, \quad \frac{d^2Z}{d\alpha^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}Z}{d\alpha^{n-1}},$$

und nach den obigen Auflösungsformeln, wenn v_i dieselbe Function von α bedeutet, welche y_i von x ist,

$$\frac{d^kZ^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^i \Pi i \left\{ v_1^{(k)} \int \frac{\zeta_1 \, d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} + v_2^{(k)} \int \frac{\zeta_2 \, d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} \ldots + v_n^{(k)} \int \frac{\zeta_n \, d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} \right\}$$
$$- \{ v_1^{(k)} V_1^{(i)} + v_2^{(k)} V_2^{(i)} \ldots + v_n^{(k)} V_n^{(i)} \}.$$

Es ist aber

$$\frac{d^kZ^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^k \Pi k \left\{ z_1^{(i)} \int \frac{\gamma_1 \, dx}{(\alpha-x)^{k+1}} + z_2^{(i)} \int \frac{\gamma_2 \, dx}{(\alpha-x)^{k+1}} \ldots + z_n^{(i)} \int \frac{\gamma_n \, dx}{(\alpha-x)^{k+1}} \right\},$$

ferner

$$v_1^{(k)} V_1^{(i)} + v_2^{(k)} V_2^{(i)} \ldots + v_n^{(k)} V_n^{(i)} = \Sigma v_g^{(k)} V_g^{(i)} = \Sigma\Sigma v_g^{(k)} z_h^{(i)} \iint \zeta_g \gamma_h U \, d\alpha \, dx,$$

wo für die beiden Indices g und h die Werthe $1, 2, \ldots n$ zu setzen sind. Man erhält daher folgendes Theorem.

Theorem.

„Es seien $A, A_1, \ldots A_n$ und $B, B_1, \ldots B_n$ ganze rationale Functionen von x, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, dafs, wenn man durch die obern Accente die Differentialquotienten bezeichnet, für zwei beliebige Functionen y und z der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots + A_ny^{(n)}\} + y\{Bz + B_1z' + B_2z'' \ldots + B_nz^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differential wird; es seien

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_n$$

die n von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots + A_ny^{(n)} = 0,$$

und

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_n$$

die von ihnen abhängigen Lösungen der Gleichung

$$Bz + B_1z' + B_2z'' \ldots + B_nz^{(n)} = 0,$$

welche man, was immer möglich ist, so bestimmt, dafs das für unbestimmte Functionen y und z und ohne Hinzufügung einer willkürlichen Constante dargestellte Integral des Ausdrucks $z\{Ay + A_1y' \ldots\} + y\{Bz + B_1z' \ldots\}$ verschwindet, wenn man $y = y_i$ und $z = z_k$, oder $= 1$ wird, wenn man $y = y_i$, $z = z_i$ setzt; es sei ferner $C_{m,p}$ der Coëfficient von $\frac{1}{x}$ in dem Ausdrucke

$$-x^{-m-1}\{Ay + A_1y' \ldots + A_ny^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-p-1}$, oder, was dasselbe ist, in dem Ausdrucke

$$x^{-p-1}\{By + B_1 y' \ldots + B_n y^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-m-1}$ gesetzt wird; es seien endlich

$$v_1,\ v_2,\ \ldots.\ v_n;\quad \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots.\ \zeta_n$$

die Functionen von α, in welche sich

$$y_1,\ y_2,\ \ldots.\ y_n;\quad z_1,\ z_2,\ \ldots.\ z_n$$

verwandeln, wenn man α für x substituirt: so wird

$$\Pi k\left\{z_1^{(i)}\int\frac{y_1\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}} + z_2^{(i)}\int\frac{y_2\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}} \ldots. + z_n^{(i)}\int\frac{y_n\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}}\right\}$$

$$-\Pi i\left\{v_1^{(k)}\int\frac{\zeta_1\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} + v_2^{(k)}\int\frac{\zeta_2\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} \ldots. + v_n^{(k)}\int\frac{\zeta_n\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}}\right\}$$

$$= \Sigma C_{m,p}\, v_g^{(k)} z_h^{(i)} \int\alpha^m \zeta_g\,d\alpha \,.\int x^p y_h\,dx,$$

wo in der mit Σ bezeichneten vierfachen Summe g und h die Werthe $1, 2, \ldots. n$ erhalten, m und p alle Werthe, für welche sich in einer oder in mehreren von den Functionen $x^{-l-1}A_l$ ein Term x^{m+p} findet, und die Accente i und k, welche die Ordnung der Differentialen anzeigen, beliebig angenommne Zahlen aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots. n-1$ sind."

Die im vorstehenden Theorem gegebne Formel umfafst nn Gleichungen, welche man aus der Combination aller Werthe von i mit allen Werthen von k erhält. Man kann mittelst derselben die nn Gröfsen $\int\frac{y_i\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ lineär durch die nn Gröfsen $\int\frac{\zeta_i\,d\alpha}{(\alpha-x)^{k+1}}$ ausdrücken und umgekehrt. Für $n=1$ erhält man den §. 1. entwickelten Satz.

Wenn die Differentialgleichung $Ay + A_1 y' \ldots. + A_n y^{(n)} = 0$ die besondre Form

$$Ky + \frac{d.K_1 y'}{dx} + \frac{d^2.K_2 y''}{dx^2} + \frac{d^3.K_3 y'''}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

hat, welche ich in meinen Untersuchungen *über die Kriterien des Maximum und Minimum bei den isoperimetrischen Problemen* betrachtet habe, wird die Differentialgleichung $By + B_1 y' \ldots. + B_n y^{(n)} = 0$ mit ihr identisch, oder es wird

$$B = -A,\quad B_1 = -A_1,\quad B_2 = -A_2,\quad \ldots.\quad B_n = -A_n.$$

Man kann diese lineären Differentialgleichungen als solche bezeichnen, bei denen jede Lösung zugleich ein Factor, welcher sie integrabel macht, und jeder solcher

Factor eine ihrer Lösungen ist. Sie nehmen für eine gerade Ordnung immer die obige Form an; für eine ungerade Ordnung kann man dieselben passend so darstellen:

$$\sqrt{K_1}.\frac{d.y\sqrt{K_1}}{dx}+\frac{d.\left(\sqrt{K_2}\,\frac{d.y'\sqrt{K_2}}{dx}\right)}{dx}+\frac{d^2\left(\sqrt{K_3}\,\frac{d.y''\sqrt{K_3}}{dx}\right)}{dx^2}+\text{etc.}=0.$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichungen bietet sich der merkwürdige Umstand dar, dafs durch *eine* bekannt gewordne Lösung sich ihre Ordnung um *zwei* Einheiten verringern läfst, und die übrigen Lösungen sich je nach der weitern Verringerung der Ordnung der Differentialgleichung, die sich durch sie erreichen läfst, unterscheiden. Man kann ihre Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ immer so bestimmen, dafs die aus denselben auf die oben angegebne Weise abgeleiteten Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit ihnen übereinkommen, so dafs

$$z_1=y_1, \quad z_2=y_2, \quad \ldots \quad z_n=y_n.$$

Um das aufgestellte allgemeine Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgränzen der Integrale zu bestimmen und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Character der Lösungen der lineären Differentialgleichungen, deren Coëfficienten ganze rationale Functionen der Variable sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.

13. Mai 1846.

19.

Über einige der Binomialreihe analoge Reihen.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

Wenn man der Binomialreihe ähnliche Reihen bildet, indem man statt des p^{ten} Binomialcoëfficienten den analogen Ausdruck

$$v_p = \frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^p)}$$

setzt, so erhält der Quotient zweier solcher, verschiednen Werthen von v entsprechenden, Reihen wiederum dieselbe Form. Man hat nämlich, wenn $u = wv^{-1}$,

$$1. \quad \frac{1+w_1z+w_2z^2+w_3z^3+\text{etc.}}{1+v_1z+v_2z^2+v_3z^3+\text{etc.}} = 1+u_1.vz+u_2.v^2z^2+u_3.v^3z^3+\text{etc.}$$

$$= 1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$

Bedeutet i eine unendlich grofse Gröfse und setzt man

$$x = e^{-\frac{1}{i}}, \quad v = e^{\frac{m}{i}}, \quad w = e^{\frac{m+n}{i}},$$

so verwandelt sich diese Formel in

$$\frac{(1-z)^{m+n}}{(1-z)^m} = (1-z)^n,$$

wenn man statt der Potenzen von $1-z$ ihre Entwicklungen setzt. Aus (1.) folgt, ***dafs der reciproke Werth der Reihe***

$$1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$

durch bloſse Vertauschung von v und w erhalten wird. Bezeichnet man diese Reihe mit

$$[w,v] = 1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.},$$

so wird die Fundamentaleigenschaft der Function $[w,v]$ durch die Gleichung

$$2. \quad [w,v] = \frac{[w,1]}{[v,1]}$$

gegeben. Setzt man iv, iw, $i^{-1}z$ für v, w, z, so ändert sich $[w,v]$ nicht. Nimmt man i unendlich, so verwandeln sich v_p und w_p in

$$\frac{(-i)^p x^{\frac{1}{2}(pp-p)} v^p}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)}, \quad \frac{(-i)^p x^{\frac{1}{2}(pp-p)} w^p}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)},$$

und es wird daher $[w, v]$ zufolge (1.) gleich dem Bruche

$$\frac{1-\frac{wz}{1-x}+\frac{xw^2z^2}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^3w^3z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^6w^4z^4}{(1-x)\ldots(1-x^4)}-\text{etc.}}{1-\frac{vz}{1-x}+\frac{xv^2z^2}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^3v^3z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^6v^4z^4}{(1-x)\ldots(1-x^4)}-\text{etc.}}.$$

Der Zähler und Nenner desselben wird aus der Formel ***Eulers***,

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\ldots.$$
$$=1+\frac{xz}{1-x}+\frac{x^3z^2}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\text{etc.},$$

erhalten, wenn man $x^{-1}vz$ und $x^{-1}wz$ für z setzt. Hieraus folgt

$$3.\quad [w,v]=1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)(1-x^3wz)\ldots.}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)(1-x^3vz)\ldots.}.$$

Um die Formel (3.) zu beweisen, setze ich

$$\varphi(z)=\frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)(1-x^3wz)\ldots.}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)(1-x^3vz)\ldots.}$$
$$=1+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+A_4z^4+\text{etc.},$$

wo die Coëfficienten A_1, A_2 etc. die Gröfse z nicht enthalten sollen. Aus der Relation

$$\varphi(z)-\varphi(xz)=z\{v\varphi(z)-w\varphi(xz)\},$$

welche unmittelbar aus der von $\varphi(z)$ gegebnen Definition folgt, erhält man die Werthe von A_1, A_2 etc. mittelst der Gleichungen:

$(1-x)A_1=v-w$, $(1-x^2)A_2=(v-xw)A_1$, $(1-x^3)A_3=(v-x^2w)A_2$, etc.

Durch Substitution dieser Werthe in die für $\varphi(z)$ angenommne Reihe ergiebt sich die Formel (3.), aus welcher sogleich auch die Formel (1.) folgt.

Wenn man die Formel (1.) mit $1+v_1z+v_2z^2+v_3z^3+$ etc. multiplicirt, und hierauf nach den Potenzen von z entwickelt, so giebt die Vergleichung der auf beiden Seiten in z^p multiplicirten Terme, die Formel

$$4.\quad \frac{(1-w)(1-xw)(1-x^2w)\ldots.(1-x^{p-1}w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.(1-x^p)}$$
$$=\frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots.(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.(1-x^p)}+\frac{v-w}{1-x}\cdot\frac{(1-v)(1-xv)\ldots.(1-x^{p-2}v)}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^{p-1})}$$
$$+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-v)(1-xv)\ldots.(1-x^{p-3}v)}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^{p-2})}\ldots.+\frac{(v-w)(v-xw)\ldots.(v-x^{p-1}w)}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^p)},$$

welche dem sogenannten binomischen Lehrsatz für Facultäten entspricht. Man findet diese Formel in der ***Analysis*** von ***Schweins*** (Heidelb. 1820 pg. 292. 3), nur dafs dort für v und w beliebige ganze Potenzen von x gesetzt sind. Es

folgt aus derselben durch Division mit dem ersten Terme des rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrucks

$$5.\quad \frac{(1-w)(1-xw)(1-x^2w)\ldots(1-x^{p-1}w)}{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots(1-x^{p-1}v)}$$
$$= 1+\frac{v-w}{1-x}\cdot\frac{1-x^p}{1-x^{p-1}v}+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x^{p-1}v)(1-x^{p-2}v)}$$
$$\ldots+\frac{(v-w)(v-xw)\ldots(v-x^{p-1}w)}{(1-x^{p-1}v)(1-x^{p-2}v)\ldots(1-v)}.$$

Setzt man $x^{p-1}v=r$, $x^{p-1}w=u$, und dann $\frac{1}{x}$ für x, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$6.\quad \frac{(1-u)(1-xu)(1-x^2u)\ldots(1-x^{p-1}u)}{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{p-1}r)}$$
$$= 1-\frac{u-r}{1-x}\cdot\frac{1-x^p}{1-r}+\frac{(u-r)(u-xr)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-r)(1-xr)}x$$
$$\ldots\pm\frac{(u-r)(u-xr)\ldots(u-x^{p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})\ldots(1-x)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}x^{\frac{1}{2}p(p-1)}.$$

Setzt man hierin $u=x^mr$, so erhält man

$$7.\quad \frac{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}=\frac{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}$$
$$=1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}x^2r^2+\text{etc.}$$

wo die einzelnen Terme die Factoren $x^\beta r^\alpha$ haben, in welchen die Exponenten α und β die natürlichen und die pronischen (doppelten dreieckigen) Zahlen sind. Wenn man ferner in (6.) r für u und x^mr für r setzt, so erhält man

$$8.\quad \frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}=\frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p+m-1}r)}$$
$$=1-\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^mr)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)}xr^2+\text{etc.},$$

wo die Exponenten α und β in den Factoren $r^\alpha x^\beta$ die natürlichen und die dreieckigen Zahlen sind. Diese Gleichung wird auch aus der vorigen erhalten, wenn man $-m$ für m und dann x^mr setzt.

Setzt man in (3.) $z=1$, $v=r$, $w=x^mr$ oder $z=1$, $v=x^mr$, $w=r$, so erhält man für die Ausdrücke (7.) und (8.) andre Entwicklungen:

$$9.\quad \frac{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}=\frac{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}$$
$$=1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^{p-1}r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{p-1}r)(1-x^{p-2}r)}r^2+\text{etc.},$$

$$10.\quad \frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)} = \frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p+m-1}r)}$$
$$= 1 - \frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^{m+p-1}r)}r + \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{m+p-1}r)(1-x^{m+p-2}r)}xr^2 + \text{etc.}$$

In der letzten Formel sind wieder in den Factoren $r^\alpha x^\beta$ die Exponenten α und β die natürlichen und die dreieckigen Zahlen. In den Reihen (8.) und (9.) mufs man m und p, wenn sie beide ganze positive Zahlen sind, mit einander vertauschen können, wie aus der in diesem Falle geltenden doppelten Darstellung der ihnen gleichen Producte erhellt. Wenn aber diese Producte für andre Werthe von m und p eine Bedeutung zu haben aufhören, so bleibt doch die Gleichheit der durch Vertauschung von m und p erhaltnen Reihen für jeden Werth von m und p gültig. Denn wenn man die Reihen, welche für ganze positive Werthe von m und p einander gleich sind, nach den aufsteigenden Potenzen von r entwickelt, und die in dieselben Potenzen von r multiplicirten Terme vergleicht, so erhält man zwischen den Gröfsen x^m und x^p, die man als zwei Unbekannte ansehen kann, Gleichungen von einer endlichen Ordnung, die für unendlich viele Werthe der Unbekannten erfüllt werden, nämlich immer, wenn man für dieselben beliebige ganze positive Potenzen von x setzt. Es mufs also jede dieser Gleichungen identisch sein, in welchem Falle aber auch die Gleichungen zwischen den Reihen gelten, wenn man für x^m und x^p beliebige Gröfsen setzt. Man erhält auf diese Weise, wenn man für x^m und x^p die Gröfsen s und t substituirt, die beiden Gleichungen:

$$11.\quad 1 + \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}tr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}tr)(1-x^{-2}tr)} + \text{etc.}$$
$$= 1 + \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}sr)} + \frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}sr)(1-x^{-2}sr)} + \text{etc.},$$

$$12.\quad 1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-sr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t).xr^2}{(1-x)(1-x^2)(1-sr)(1-xsr)} - \text{etc.}$$
$$= 1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-tr)} + \frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s).xr^2}{(1-x)(1-x^2)(1-tr)(1-xtr)} - \text{etc.},$$

in deren letztrer der $(i+1)^{\text{te}}$ Term den Factor $x^{\frac{1}{2}i(i-1)}$ hat. Weil bei dem Beweise dieser beiden Gleichungen eine Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von r vorausgesetzt worden ist, so mufs man in der ersten derselben $x > 1$, in der zweiten $x < 1$ annehmen. Auch sieht man, wie die eine in die andre übergeht, wenn man xr für r und dann $\frac{1}{x}$ für x setzt.

Will man das Product

$$(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{m-1}r),$$

in welchem x kleiner als 1 angenommen werden soll, ***interpoliren,*** d. h. will man einen Ausdruck haben, welcher die Fundamental-Eigenschaft dieses Productes besitzt und sich für ein ganzes positives m auf dieses Product selbst reducirt, so dient hiezu der in's Unendliche fortlaufende Ausdruck

$$13.\quad \frac{1-r}{1-x^m r}\cdot\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\cdot\frac{1-x^2r}{1-x^{m+2}r}\cdot\frac{1-x^3r}{1-x^{m+3}r}\cdot\ldots$$
$$=(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{m-1}r).$$

Denn wenn man denselben bis zum $n$ten Factor fortsetzt, wodurch man das Product

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{n-1}r)}{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+n-1}r)}$$

erhält, so wird für ein ganzes positives m das Verhältnifs dieses zu dem vorgelegten Product,

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{n-1}r)}{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{m+n-1}r)}=\frac{1}{(1-x^n r)(1-x^{n+1}r)\ldots(1-x^{n+m-1}r)},$$

eine Gröfse, die sich mit wachsendem n und zwar sehr schnell der Einheit nähert. Die Fundamental-Eigenschaft des vorgelegten Productes, das ich mit $F(r)$ bezeichnen will, ist durch die Gleichung

$$\frac{(1-r)F(xr)}{(1-x^m r)F(r)}=1$$

ausgedrückt. Substituirt man für $F(r)$ das unendliche Product, so wird der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen

$$\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\cdot\frac{(1-x^2r)(1-x^{m+1}r)}{(1-xr)(1-x^{m+2}r)}\cdot\frac{(1-x^3r)(1-x^{m+2}r)}{(1-x^2r)(1-x^{m+3}r)}\cdot\ldots;$$

setzt man dieses Product bis zum $n$ten Factor fort, so erhält man

$$\frac{1-x^n r}{1-x^{(m+n)}r},$$

welche Gröfse sich für jedes m mit wachsendem n sehr schnell der Einheit nähert.

Für ganze positive Werthe von m und p kann man den Ausdruck (7.)

$$\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}=\frac{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)},$$

auch durch die Formel

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)\cdot(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}$$

darstellen. Will man diese Formel interpoliren, so geschieht dies nach dem Vorigen durch das unendliche Product

$$14.\quad \frac{(1-x^m r)(1-x^p r)}{(1-r)(1-x^{m+p}r)}\cdot\frac{(1-x^{m+1}r)(1-x^{p+1}r)}{(1-xr)(1-x^{m+p+1}r)}\cdot\frac{(1-x^{m+2}r)(1-x^{p+2}r)}{(1-x^2r)(1-x^{m+p+2}r)}\cdot\ldots$$
$$=\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1})\ldots(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}$$

Die Formel (7.) gilt für ein ganzes positives p, aber für ein beliebiges m. Die dort gegebene Reihe

$$1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}r^2x^2+\text{etc.}$$

behält aber ihre Bedeutung, wenn man für beide Potenzen x^m und x^p beliebige Gröfsen setzt, während das Product eine Bedeutung zu haben aufhört, wenn nicht wenigstens eine der Gröfsen m und p eine ganze positive Zahl ist. Ersetzt man aber das Product durch seine Interpolationsformel (14.), so bleibt die Gleichung (7.) für ein beliebiges m und p bestehen. Setzt man nämlich wieder

$$x^m = s, \quad x^p = t,$$

so ist zufolge des bereits Gefundenen die Formel

15.
$$1+\frac{(1-s)(1-t)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-s)(x-s)(1-t)(x-t)}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}r^2$$
$$+\frac{(1-s)(x-s)(x^2-s)(1-t)(x-t)(x^2-t)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-r)(1-xr)(1-x^2r)}r^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{(1-sr)(1-tr)}{(1-r)(1-str)}\cdot\frac{(1-xsr)(1-xtr)}{(1-xr)(1-xstr)}\cdot\frac{(1-x^2sr)(1-x^2tr)}{(1-x^2r)(1-x^2str)}\cdot\ldots$$

immer gültig, wenn wenigstens die eine der beiden Gröfsen s oder t eine ganze positive Potenz von x ist. Es sei der erste Factor des unendlichen Productes, in eine Reihe nach den aufsteigenden Potenzen von r entwickelt,

$$\frac{(1-sr)(1-tr)}{(1-r)(1-str)}=1+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\text{etc.},$$

so wird das unendliche Product die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}&(1+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\text{etc.})\\ &\times(1+c_1xr+c_2x^2r^2+c_3x^3r^3+\text{etc.})\\ &\times(1+c_1x^2r+c_2x^4r^2+c_3x^6r^3+\text{etc.})\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\times(1+c_1x^nr+c_2x^{2n}r^2+c_3x^{3n}r^3+\text{etc.})\end{aligned}$$

nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen läfst. Bezeichnet man diese Gränze mit

$$1+C_1r+C_2r^2+C_3r^3+\text{etc.},$$

so ist C_i eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen $c_1, c_2, \ldots. c_i$, also auch eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen s und t. Ist die unendliche Reihe links vom Gleichheitszeichen in der Formel (15.), nach den aufsteigenden Potenzen von r entwickelt,

$$1+K_1r+K_2r^2+K_3r^3+\text{etc.},$$

so wird K_i ebenfalls eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen s

und t, und es gilt die Gleichung

$$C_i = K_i$$

für ein beliebiges s und für unendliche viele Werthe von t, nämlich wenn man für t beliebige ganze positive Potenzen von x setzt. Aber dies ist nur möglich, wenn die Gleichung $C_i = K_i$ identisch ist, also auch für jeden Werth von t gilt, in welchem Falle auch die Gleichung (15.) für jeden Werth von t gilt. Es ist hiebei nur erforderlich, dafs die Gröfsen x, r und str kleiner als 1 sind, weil nur unter dieser Bedingung die nach den aufsteigenden Potenzen von r angestellten Entwicklungen convergent sind.

Man erhält ganz auf dieselbe Weise aus der Formel (8.) für den inversen Werth des Ausdrucks (7.) die Formel

16.
$$1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-sr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(x-t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-sr)(1-xsr)} - \frac{(1-s)(1-xs)(1-x^2s)(1-t)(x-t)(x^2-t)r^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-sr)(1-xsr)(1-x^2sr)} + \text{etc.}$$
$$= \frac{(1-r)(1-str)}{(1-sr)(1-tr)} \cdot \frac{(1-xr)(1-xstr)}{(1-xsr)(1-xtr)} \cdot \frac{(1-x^2r)(1-x^2str)}{(1-x^2sr)(1-x^2tr)} \cdot \ldots,$$

in welcher nur vorausgesetzt wird, dafs x, sr und tr kleiner als 1 sind. Da das unendliche Product in Bezug auf s und t symmetrisch ist, und auch die Gränzbedingungen für s und t dieselben sind, so mufs es auch in der Reihe links vom Gleichheitszeichen verstattet sein, s und t zu vertauschen, wodurch man die oben besonders bewiesene Formel (12.) erhält.

In dem besondern Fall, wenn sich alle vier Gröfsen x, r, s, t gleichzeitig ihrer gemeinschaftlichen Gränze 1 unendlich nähern, gehen die Reihen (15.) und (16.) in die Form

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \text{etc.}$$

über. Dieser Gränzfall ist schwieriger zu behandeln als der allgemeine, in welchem x um eine beliebige endliche Gröfse kleiner als 1 ist, und es sind die Gröfsen α, β, γ noch, wie man weifs, gewissen besondern Bedingungen zu unterwerfen, damit die Reihe convergire.

Die hier gegebne Interpolationsformel (13.) ist der *Euler*schen Interpolationsformel des Productes $1.2.3....n$ analog, aber sie ist einfacher und, wenn man will, elementarer als diese. Die *Euler*sche Interpolationsformel, und zwar in ihrer noch heut gebräuchlichen Form, gehört zu seinen ersten bekannt gewordnen Arbeiten. In der von Herrn Staatsrath *von Fufs* herausgegebnen Correspondenz findet sich nämlich in dem ersten Briefe *Eulers* an *Goldbach* vom

13. October **1729** das Product $1.2.3.... m$ bereits durch das unendliche Product

$$\frac{1.2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}.3}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}.4}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}.5}{4+m}\text{ etc.}$$

ersetzt. ***Euler*** hat in dem 3ten Theil seiner Differentialrechnung im 16ten Capitel „*Von der Differentiation der inexplicabeln Functionen*" §. 382 die allgemeine Regel gegeben, dafs das Product $A.B.C....X$, wo X der x^{te} Factor, X', X'' etc. die auf X folgenden sind, durch das unendliche Product

$$\frac{A}{X'}\cdot\frac{B}{X''}\cdot\frac{C}{X'''}\cdot\frac{D}{X^{\text{IV}}}\cdot...$$

interpolirt wird, wenn $\log X$ für ein unendliches x verschwindet; dagegen durch das unendliche Product

$$\frac{A^x}{X'}\cdot\frac{B^x A^{1-x}}{X''}\cdot\frac{C^x A^{1-x}}{X'''}\cdot...,$$

wenn erst die ersten Differenzen der Reihe $\log X$, $\log X'$ etc. für ein unendliches x verschwinden. Im folgenden Capitel „*Von der Interpolation der Reihen*" §. 399 giebt er noch für den Fall, wo erst die zweiten Differenzen der Reihe $\log X$, X', X'' etc. für ein unendliches x verschwinden, die Interpolationsformel

$$A\cdot B\cdot C....X$$
$$= A^{x(2-x)}B^{\frac{1}{2}x(x-1)}.\frac{A^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}B^{x(2-x)}C^{\frac{1}{2}x(x-1)}}{X'}.\frac{B^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}C^{x(2-x)}D^{\frac{1}{2}x(x-1)}}{X''}....$$

Der hier betrachtete Fall gehört zu der einfachsten Classe, weil der Factor $\log(1-rx^n)$ selbst schon für ein unendliches n verschwindet, während der Gränzfall, wo r und x sich der Einheit unendlich nähern, zu dem nächst folgenden schwierigern gehört, wo erst die ersten Differenzen der Logarithmen der unendlich entfernten Factoren verschwinden.

Ich erwähne gelegentlich, dafs ***Euler*** in dem nächst folgenden Briefe vom 8ten Januar 1730 die Darstellung der Interpolationsformel von $1.2.3....n$ durch das bestimmte Integral $\int dx(-lx)^n$, giebt und die Formel,

$$\sqrt[q]{(1\cdot2\cdot3....q)}\left[\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)....\left(\frac{qp}{q}+1\right)\right]\cdot$$
$$\left[\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{q}}\ ....\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right]$$
$$=\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}},$$

wo die Integrale immer zwischen den Gränzen 0 und 1 zu nehmen sind. Er bemerkt, wie für $p=1$, $q=2$ mittelst dieser Formel der Werth von $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}$ durch die Kreisperipherie erhalten wird.

28. Juni 1846.

20.

Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.

(Auszug eines Schreibens des Dr. *E. Heine*, Privatdocenten in Bonn, an den Prof. *C. G. J. Jacobi* in Berlin.)

Die Meinung ihres geehrten Freundes, dafs die allgemeine *Euler*sche Kettenbruchformel, welche jetzt ihr hundertjähriges Jubiläum feiert, auf die Ausdrücke angewandt werden kann, die neuerdings Hr. *Eisenstein* im 27ten und 28ten Bande des *Crelle*schen Journals behandelt hat, bestätigt sich. Auch jene alte Formel giebt für alle diese Ausdrücke einfache Kettenbrüche, bisweilen dieselben, bisweilen verschiedne, aber immer eben so stark oder stärker convergirende wie die von Hrn. *Eisenstein* mitgetheilten. Dabei führt sie auf ein regelmäfsigeres Gesetz und supponirt durchaus nicht, dafs Reihe und Kettenbruch in's Unendliche fortlaufen.

Die *Euler*sche Formel ist

$$A-B+C-D+E-F+\text{etc.} = \frac{A}{1}+\frac{B}{A-B}+\frac{AC}{B-C}+\frac{BD}{C-D}+\frac{CE}{D-E}+\text{etc.}$$

Damit man ihre Anwendung auf begränzte Ausdrücke vor Augen habe, stelle ich sie so dar

$$1+\varphi(1)+\varphi(2)\ldots+\varphi(n)=\frac{1}{1}-\frac{1}{a_1+1}-\frac{a_1}{a_2+1}-\frac{a_2}{a_3+1}-\frac{a_3}{a_4+1}\vdots-\frac{a_{n-1}}{a_n+1},$$

wo $a_m=\frac{\varphi(m-1)}{\varphi(m)}$, $a_1=\frac{1}{\varphi(1)}$. Da $\frac{1}{1-\frac{1}{a_1+1}-K}=1+\frac{1}{a_1-K}$, so kann man den Kettenbruch von Anfang kürzer so schreiben:

$$1+\frac{1}{a_1}-\frac{a_1}{a_2+1}-\text{etc.}$$

Um ihm gleich eine für viele Beispiele bequeme Form zu geben, setze ich

$$a_m=\frac{1}{\alpha\beta_m}\cdot\frac{b_m}{b_{m-1}},$$

wodurch er die Form

$$1+\varphi(1)+\varphi(2)\ldots.+\varphi(n)$$
$$=1+\frac{\alpha\beta_1 b_0}{b_1}-\frac{\alpha\beta_2 b_1^2}{b_2+\alpha\beta_2 b_1}-\frac{\alpha\beta_3 b_2^2}{b_3+\alpha\beta_3 b_2}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot-\frac{\alpha\beta_n b_{n-1}^2}{b_n+\alpha\beta_n b_{n-1}}$$

annimmt. Ich erlaube mir jetzt, einige Beispiele dieser allgemeinen Formel hinzuzufügen.

I. $$1+qz+q^4z^2+q^9z^3\ldots.+q^{nn}z^n$$
$$=1+\frac{qz}{1}-\frac{q^3z}{1+q^3z}-\frac{q^5z}{1+q^5z}-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot-\frac{q^{2n-3}z}{1+q^{2n-3}z}-\frac{q^{2n-1}z}{1+q^{2n-1}z}.$$

Hier ist

$$\varphi(n)=q^{nn}z^n,\quad a_n=\frac{1}{q^{2n-1}z},\quad \alpha=z,\quad \beta_n=q^{2n-1},\quad b_n=1.$$

Setzt man q^a für q und $q^b z$ für z, so erhält man hieraus die Kettenbruchentwicklung von $\Sigma q^{ann+bn}z^n$, z. B. für $a=b=\frac{1}{2}$ wird

$$1+qz+q^3z^2\ldots.+q^{\frac{1}{2}(nn+n)}z^n$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{qz}{1+qz}-\frac{q^2z}{1+q^2z}-\frac{q^3z}{1+q^3z}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot-\frac{q^{n-1}z}{1+q^{n-1}z}-\frac{q^nz}{1+q^nz}.$$

Für $z=1$, $q=w^{-1}$ wird dies der von Hrn. *Eisenstein* gegebne Kettenbruch: die Beschränkung, welche derselbe hinzugefügt hat, dafs w eine $(n+1)^{te}$ Wurzel der Einheit sein müsse, zeigt sich daher als unnöthig.

II. In ihren *Fundamentis* S. 187 (14.) findet man die Formel

$$\frac{2k'K}{\pi}=1-\frac{4q}{1+q}+\frac{4q^3}{1+q^2}-\frac{4q^6}{1+q^3}+\frac{4q^{10}}{1+q^4}-\text{ etc.}$$

Die *Euler*sche Kettenbruchformel giebt die beliebig begränzte Reihe:

$$1-\frac{4q}{1+q}+\frac{4q^3}{1+q^2}\ldots.\pm\frac{4q^{\frac{1}{2}(nn+n)}}{1+q^n}$$
$$=1-\frac{4q}{1+q}+\frac{q^2(1+q)^2}{1-q^3}+\frac{q^3(1+q^2)^2}{1-q^5}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{q^n(1+q^{n-1})^2}{1-q^{2n-1}}.$$

Setzt man hierin $-q$ für q, $n=\infty$, so erhält man den Kettenbruch für $\frac{2K}{\pi}$ in einer andern als der von Hrn. ***Eisenstein*** gegebnen Form.

III. Hr. ***Claussen*** hat, wie sie in ihren ***Fund.*** S. 187 anführen, der ***Lambert***schen Reihe

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^4}{1-q^4}+\text{ etc.}$$

die Form

$$q\cdot\frac{1+q}{1-q}+q^4\cdot\frac{1+q^2}{1-q^2}+q^9\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}+\text{ etc.}$$

gegeben. Wenn man statt $\frac{1+q^n}{1-q^n}$ die beiden Terme $\frac{1}{1-q^n}+\frac{q^n}{1-q^n}$ setzt und dann die ***Euler***sche Kettenbruchformel anwendet, so erhält man

$$q\cdot\frac{1+q}{1-q}+q^4\cdot\frac{1+q^2}{1-q^2}+q^9\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\cdots+q^{nn}\cdot\frac{1+q^n}{1-q^n}$$

$$=\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q}+\frac{q^4}{1-q^2}+\frac{q^6}{1-q^2}\cdots+\frac{q^{nn}}{1-q^n}+\frac{q^{nn+n}}{1-q^n}$$

$$=\frac{q}{1-q}-\frac{q(1-q)^2}{1-q^2}-\frac{q^2(1-q)^2}{1-q^3}-\frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^4}-\frac{q^3(1-q^2)^2}{1-q^5}-\cdots\cdots-\frac{q^n(1-q^n)^2}{1-q^{2n}}$$

$$=\frac{q}{1-q}-\frac{q(1-q)}{1+q}-\frac{q^2(1-q)}{1-q^3}-\frac{q^2(1-q^2)}{1+q^2}-\frac{q^2(1-q^2)}{1-q^5}-\cdots\cdots-\frac{q^n(1-q^n)}{1+q^n}.$$

Der erste dieser beiden Kettenbrüche wird für $n=\infty$ der von Hrn. ***Eisenstein*** gegebne. Hätte man die ***Euler***sche Kettenbruchformel unmittelbar auf die von ***Claussen*** der Reihe gegebne Form angewandt, ohne jedes Glied in zwei zu zerlegen, so würde man nur die Hälfte der Glieder gebraucht haben.

IV. In der ***Introductio*** von ***Euler*** findet man die Formel

$$(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)(1+q^4z)\ldots.$$

$$=1+\frac{qz}{1-q}+\frac{q^3z^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^6z^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\text{ etc.}$$

Für die begränzte Reihe giebt die ***Euler***sche Kettenbruchformel

$$1+\frac{qz}{1-q}+\frac{q^3z^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^{\frac{1}{2}(nn+n)}z^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots.(1-q^n)}$$

$$=1+\frac{qz}{1-q}-\frac{q^2(1-q)z}{1-q^2+q^2z}-\frac{q^3(1-q^2)z}{1-q^3+q^3z}-\cdots\cdots-\frac{q^n(1-q^{n-1})z}{1-q^n+q^nz}.$$

Der in's Unendliche sich erstreckende Kettenbruch wird daher dem Product $(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots$ gleich. Er ist von dem von Hrn. ***Eisenstein*** mitgetheilten verschieden, aber eben so bequem; für $x=1$ vereinfacht er sich noch wesentlich, indem dann alle Nenner $=1$ werden.

Man kann auch die Verhältnisse der vier Ausdrücke,

$$(1\pm q^2x)(1\pm q^4x)(1\pm q^6x)\ldots., \quad (1\pm qx)(1\pm q^3x)(1\pm q^5x)\ldots.,$$

welche Hr. ***Eisenstein*** mit $A+Bi$, $C+Di$, $E+Fi$ etc. bezeichnet, in passende Reihen entwickeln, welche sich durch die ***Euler***sche Formel in Kettenbrüche entwickeln lassen, die zwar eben so convergent, aber etwas complicirter als die von Hrn. ***Eisenstein*** mitgetheilten sind. Ich habe diesen Gegenstand nicht weiter verfolgt, sondern bin zu einem andern übergegangen.

Sie haben mich während meines Aufenthaltes in Königsberg auf die Wichtigkeit aufmerksam gemacht, welche jeder besondre Fall hat, in dem man aus einer unbestimmten Anzahl lineärer Gleichungen, deren Coëfficienten ein gegebnes Gesetz befolgen, die Unbekannten durch einfache Formeln erhalten kann. Sie bemerkten, dafs jedesmal, wenn die Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruchs, in den man eine Reihe verwandelt hat, sich einfach angeben lassen, hierdurch ein solches System lineärer Gleichungen indicirt wird. Ein Beispiel hiervon gab der Kettenbruch in der Abhandlung von ***Gaufs*** im 3ten Bande der Göttinger Comment., „über die zweckmäfsige Wahl der Abscissen bei mechanischen Quadraturen." Sie hatten diese Betrachtungen noch auf andre Fälle ausgedehnt, und forderten mich auf, allgemeine Untersuchungen in Bezug auf die Reihe

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\text{etc.}$$

anzustellen. Ich fand dort bald, dafs, wenn $\alpha=1$, die betreffenden Systeme lineärer Gleichungen sich in unbestimmter Anzahl auflösen lassen, und man dadurch ein einfaches Gesetz für die Nenner der Näherungsbrüche erhält. Diese Untersuchungen habe ich jetzt auch in Bezug auf solche Ausdrücke angestellt, wie sie im Vorstehenden in Kettenbrüche verwandelt worden sind. Die Reihe

$$1+qx+q^4x^2+q^9x^3+q^{16}x^4+\text{etc.}$$

z. B. denke ich mir in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\text{etc.}}}}$$

verwandelt, so dafs, wenn man

$$\frac{1}{1}+\frac{a_1 x}{1}+\frac{a_2 x}{1}+\vdots \qquad = \frac{P_n}{Q_n}$$
$$\vdots+\frac{a_{n-1}x}{1+a_n x}$$

setzt, wo P_{2n} und P_{2n+1}, Q_{2n} und Q_{2n-1} ganze Functionen der n^{ten} Ordnung sind, die Entwicklung von $\frac{P_n}{Q_n}$ bis zu den in x^n inclusive multiplicirten Termen mit der vorgelegten Reihe übereinkommt, durch welche Bedingung diese Functionen bestimmt sind, und mittelst lineärer Gleichungen gefunden werden können. Ihre Auflösung giebt mir in dem angegebnen Beispiel

$$Q_{2n} = 1-\frac{q^{2n+1}(1-q^{2n})}{1-q^2}x+\frac{q^{4n+2}(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})}{(1-q^2)(1-q^4)}-\ldots.(-1)^n q^{n(2n+1)}x^n,$$

$$Q_{2n-1} = 1-\frac{q^{2n-1}(1-q^{2n})}{1-q^2}x+\frac{q^{4n-2}(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})}{(1-q^2)(1-q^4)}-\ldots.(-1)^n q^{n(2n-1)}x^n.$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke mit $1+qx+q^4x^2+$ etc. multiplicirt, so müssen alle Potenzen von x von x^{n+1} an bis respective x^{2n} oder x^{2n-1} verschwinden. Zwischen drei aufeinanderfolgenden Q geben diese Ausdrücke die Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_{2n+1} &= Q_{2n} - q^{4n+1}x\,Q_{2n-1}, \\ Q_{2n} &= Q_{2n-1} - q^{2n-1}(1-q^{2n})\,x\,Q_{2n-2}, \\ Q_2 &= Q_0 - qx, \qquad Q_0 = 1. \end{aligned}$$

Vergleicht man sie mit den bekannten allgemeinen Formeln, welche dazu dienen, mittelst der Nenner a_1, a_2 etc. des Kettenbruchs nach und nach Zähler und Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche zu bilden, so erhält man hiedurch umgekehrt die Nenner des Kettenbruchs $a_{2n+1} = -q^{4n+1}$, $a_{2n} = q^{2n-1}(1-q^{2n})$. Der so gefundne Kettenbruch ist von dem obigen verschieden, und derselbe, welchen Hr. Dr. *Eisenstein* gegeben hat.

Die Methode, die hier erwähnten lineären Gleichungen aufzulösen, gedenke ich in einem besondern Aufsatze an diesem und mehrern andern Beispielen zu erläutern. Von einigen Arbeiten über complexe Kettenbrüche, welche gelegentlich diese Untersuchungen veranlafst haben, hoffe ich ihnen und Hrn. Prof. *Dirichlet* nächstens etwas vorlegen zu können.

Bonn, den 14. Juni 1846.

21.

Über die Reihe

$$1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2+\ldots.$$

(Aus einem Schreiben des Herrn Dr. *Heine* in Bonn an Herrn Prof. *Lejeune Dirichlet*.)

Es war meine Absicht, Ihnen etwas über imaginäre Kettenbrüche mitzutheilen. Da ich aber in der letzten Zeit und seit ich Herrn Prof. *Jacobi* geschrieben habe, der Ihnen ohne Zweifel meinen Brief gezeigt hat, auf neue Untersuchungen gekommen bin, welche mich jetzt ganz beschäftigen, so erlauben Sie mir, Ihnen über diese einige Andeutungen zu geben und das, was ich über imaginäre Kettenbrüche zu sagen hätte, für eine spätere Mittheilung aufzusparen.

Sehr viele Reihen, darunter auch solche, auf welche die elliptischen Functionen führen, sind in der allgemeinen Reihe

$$1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2+\ldots.$$

enthalten, die ich zur Abkürzung mit $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$ oder, wenn keine Zweideutigkeit möglich ist, mit $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ bezeichne, gerade so wie es bei der hypergeometrischen Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

zu geschehn pflegt, in welche unser φ für $q=1$ übergeht. Es scheint mir nicht uninteressant, die φ ganz ähnlich zu behandeln, wie *Gauſs* die F in den „Disquisitiones generales circa ser. infin." untersucht hat. Ich will hier nur flüchtige *Andeutungen* zu einer solchen Übertragung geben. Es entspricht jedem F im §. 5. der Disquis. gen. eine Reihe φ. Einigen Formeln entsprechen zwei oder mehr verschiedene φ, nämlich denen, in welchen α oder β unendlich werden. So hat die Reihe für e^t, nämlich $F\left(1,k,1,\frac{t}{k}\right)$ für $k=\infty$, zwei analoge, nämlich

$$\varphi\left(1,k,1,q,\frac{t}{q^k}\right),\qquad \varphi(1,k,1,q,-t)$$

für $k = \infty$, wenn man im ersten Falle $q > 1$, im zweiten $q < 1$ voraussetzt. Die erste Formel giebt die Reihe

$$1 + \frac{t}{q-1} + \frac{t^2 q}{(q-1)(q^2-1)} + \frac{t^3 q^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} + \ldots + \frac{t^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^m-1)} + \ldots,$$

die zweite

$$1 + \frac{t}{q-1} + \frac{t^2}{(q-1)(q^2-1)} + \frac{t^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} + \ldots.$$

Diese wird aus der erstern erhalten, wenn man $-qt$ für t und dann $\frac{1}{q}$ für q setzt. Beide Arten, das Unendliche in den Gröfsen α, β, γ, x vorkommen zu lassen, sind verbunden in der Formel

$$1 + qx + q^4 x^2 + q^9 x^3 + \ldots = \varphi\left(1-k', 1, k, q^2, -\frac{x}{q^{1-2k'}}\right)$$

für k und k' unendlich und $q < 1$.

Ich füge hier einige Formeln hinzu, die bei der Vergleichung der *functiones contiguae* von Wichtigkeit sind:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x \cdot q^{\gamma+1-\alpha-\beta}) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, x\right), \text{ allgemein}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x \cdot q^{\gamma+m+1-\alpha-\beta} = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, x q^m\right) \text{ und}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q^\gamma-1)} \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x).$$

Von den Gleichungen zwischen den *Functiones contiguae* will ich hier einige Proben geben, und zwar werde ich jede der anzuführenden Relationen mit der Nummer versehn, die ihre entsprechende bei *Gaufs* §. 7. in der Sectio I. hat:

$$\text{(V.)} \quad (q^{\gamma-\alpha-1}-1)\varphi(\alpha,\beta,\gamma) + q^{\gamma-\alpha-1}(q^\alpha-1)\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma) - (q^{\gamma-1}-1)\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0,$$

$$\text{(VIII.)} \quad (1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1})(q^\gamma-1)\varphi(\alpha,\beta,\gamma) - (q^\gamma-1)\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma) - x q^{\alpha-1}(q^{\beta-\gamma}-1)\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1) = 0,$$

$$\text{(IX.} \quad \{(q^{\alpha-1}-1)q^{\gamma-\alpha} + xq^{\alpha-1}(q^{\beta-\gamma+1}-1)\}\varphi(\alpha,\beta,\gamma) + (q^{\gamma-\alpha}-1)\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma) - (q^{\gamma-1}-1)(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0,$$

$$\text{(XV.)} \quad (q^\gamma-1)\{q^{\gamma-1}-1-x(q^{\alpha-1}+q^{\beta-1}-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}-q^{\alpha+\beta-\gamma})\}\varphi(\alpha,\beta,\gamma) - xq^{\alpha-1}(q^{\beta-\gamma}-1)(q^{\gamma-\alpha}-1)\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1) - (q^\gamma-1)(q^{\gamma-1}-1)(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0.$$

Ich füge noch eine Formel hinzu, deren analoge sich bei *Gaufs* in demselben Abschnitt findet:

$$\text{(XIX.)} \quad \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1) - \varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{(q^\alpha-1)(q^{\gamma-\beta}-1)}{(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)} q^\beta x \varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2).$$

Auf die Formel (XIX.), die sich leicht aus der Definition der φ ergiebt, läfst sich genau dieselbe Methode anwenden, vermittelst welcher ***Gaufs*** in der Sectio II. aus seiner Formel (XIX.) sehr allgemeine Kettenbrüche ableitet. Man findet durch dieselbe

$$\frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\cfrac{a_3 x}{1-\text{etc.}}}}},$$

wenn man setzt

$$a_1 = \frac{(q^\alpha-1)(q^{\gamma-\beta}-1)}{(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}q^\beta, \qquad a_2 = \frac{(q^{\beta+1}-1)(q^{\gamma+1-\alpha}-1)}{(q^{\gamma+1}-1)(q^{\gamma+2}-1)}q^\alpha,$$

$$a_3 = \frac{(q^{\alpha+1}-1)(q^{\gamma+1-\beta}-1)}{(q^{\gamma+2}-1)(q^{\gamma+3}-1)}q^{\beta+1}, \qquad a_4 = \frac{(q^{\beta+2}-1)(q^{\gamma+2-\alpha}-1)}{(q^{\gamma+3}-1)(q^{\gamma+4}-1)}q^{\alpha+1},$$

$$a_5 = \frac{(q^{\alpha+2}-1)(q^{\gamma+2-\beta}-1)}{(q^{\gamma+4}-1)(q^{\gamma+5}-1)}q^{\beta+2}, \qquad a_6 = \frac{(q^{\beta+3}-1)(q^{\gamma+3-\alpha}-1)}{(q^{\gamma+5}-1)(q^{\gamma+6}-1)}q^{\alpha+2}$$

etc.

Ist im besondern Fall $\beta = 0$, so entsteht, wenn man $\gamma-1$ für γ schreibt:

$$F(\alpha,1,\gamma,q,x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\text{etc.}}}},$$

wo

$$a_1 = \frac{q^\alpha-1}{q^\gamma-1}, \qquad a_2 = \frac{(q-1)(q^{\gamma-\alpha}-1)}{(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}$$

$$a_3 = \frac{(q^{\alpha+1}-1)(q^\gamma-1)}{(q^{\gamma+1}-1)(q^{\gamma+2}-1)}, \qquad a_4 = \frac{(q^2-1)(q^{\gamma+1-\alpha}-1)}{(q^{\gamma+2}-1)(q^{\gamma+3}-1)},$$

$$a_5 = \frac{(q^{\alpha+2}-1)(q^{\gamma+1}-1)}{(q^{\gamma+3}-1)(q^{\gamma+4}-1)}, \qquad a_6 = \frac{(q^3-1)(q^{\gamma+2-\alpha}-1)}{(q^{\gamma+4}-1)(q^{\gamma+5}-1)}$$

etc.

Die übrigen Kettenbruchentwicklungen, welche ***Gaufs*** andeutet, lassen sich auf ähnliche Art übertragen.

Aus den beiden vorstehenden Formeln folgen, wie man auf der Stelle sieht, unter andern die Kettenbruchentwicklungen, die Hr. ***Eisenstein*** im 27ten und 28ten Bande des ***Crelle***schen Journals in drei verschiednen Abhandlungen gegeben hat.

Bonn Juni 1846.

22.

Über die Reduction des Integrals $\int \frac{fx\,dx}{\sqrt{\pm(1-x^8)}}$ auf elliptische Integrale.

(Von Herrn Prof. *F. Richelot* zu Königsberg.)

In dem vorgelegten Integral

$$\int \frac{fx\,dx}{\sqrt{\pm(1-x^8)}}$$

soll fx eine rationale Function von x bedeuten, und das obere Zeichen gelten, wenn das Argument x innerhalb der Grenzen -1 und $+1$, das untere hingegen, wenn das Argument x innerhalb der Grenzen $-\infty \,..\, -1$ und $+1 \,..\, +\infty$ enthalten ist. Führt man statt x die Gröfsen $-x$, $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x}$ ein, so reducirt man das Integral, wenn x in den Intervallen $-1 \,..\, 0$, $1 \,..\, \infty$, $-\infty \,..\, -1$ liegt, auf ein ähnliches, dessen Argument zwischen 0 und 1 enthalten ist. Hienach bleibt nur das Integral

$$\int_0^x \frac{fx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}},$$

in welchem die obere Grenze die positive Einheit nicht überschreitet, zur Reduction auf elliptische Integrale übrig.

Man kann eine jede rationale Function als ein Aggregat einer geraden und einer ungeraden Function desselben Arguments darstellen, und daher

$$fx = F(x^2) + xF_1(x^2)$$

setzen, wo $F(x^2)$ und $F_1(x^2)$ rationale Functionen von x^2 sind. Setzt man aufserdem $x^2 = z$, so erhält man

$$(A.)\quad \int_0^x \frac{fx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^z \frac{Fz\,dz}{\sqrt{(z(1-z^4))}} + \tfrac{1}{2}\int_0^z \frac{F_1 z\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}},$$

wo das zweite Integral rechts schon ein elliptisches ist. Durch die Substitution $z = \frac{1-v}{1+v}$ geht das erste in

$$\tfrac{1}{2}\int_1^z \frac{Fz\,dz}{\sqrt{(z(1-z^4))}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^v \frac{(1+v)F\left(\frac{1-v}{1+v}\right)dx}{\sqrt{(v(1-v^4))}}$$

über, wo das Argument v in den Grenzen 0 .. $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$ fortschreitet, während z in den Grenzen 1 .. $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$ enthalten ist, und umgekehrt, so dafs man eigentlich nur für das Intervall 0 .. $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$ die Reduction auszuführen hat.

Zu dem Ende setze ich

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi - z}{1 + z\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi} = \pm \operatorname{tang}\tfrac{1}{8}\pi \sqrt{w},$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn z sich im Intervall 0 .. $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$, und das untere, wenn z sich im Intervall $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$ .. 1 befindet. Aus dieser Substitution ergeben sich folgende Formeln:

$$(B.)\quad \begin{cases} z = \operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi \cdot \dfrac{1 \mp \sqrt{w}}{1 \pm \sqrt{w}\,.\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi}, \\ 1 + z^2 = (1 + \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi)\dfrac{(1 + w\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi)}{(1 \pm \sqrt{w}\,.\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi)}, \\ 1 - z^2 = (1 - \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi)\dfrac{(1 \pm \sqrt{w})(1 \pm \sqrt{w}\,.\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi)}{(1 \pm \sqrt{w}\,.\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi)^2}, \\ dz = \mp\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}\pi(1 + \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi)\dfrac{dw}{\sqrt{(w(1 \pm \sqrt{w}\,.\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi)^2)}}, \end{cases}$$

und hieraus die Umformung:

$$\frac{Fz\,dz}{\sqrt{(z(1-z^4))}} = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}\,.\cos\frac{1}{8}\pi}\cdot\frac{(1 \pm \sqrt{w}\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi)\,\Pi\,.\,dw}{\sqrt{(w(1-w)(1-w\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi)(1+w\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi))}},$$

Grenzen von z .... 0 .... $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$
– – – w 1 0
} für das obere Zeichen,

Grenzen von z .... $\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi$ 1
– – – w 0 1
} für das untere Zeichen,

wo Π das Resultat der Substitution des Werthes (*B.*) von z in der Function Fz und also eine rationale Function von $\sqrt{w}$ ist. Man kann aber das Product

$$(1 \pm \sqrt{w}\,.\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi)\,\Pi$$

stets auf die Form

$$\Pi_1 w \pm \sqrt{w}\,\Pi_2 w$$

bringen, worin $\Pi_1 w$ und $\Pi_2 w$ rationale Functionen von w bedeuten, und erhält daher schliefslich folgende Umformungsgleichung:

$$\int \frac{Fz\,dz}{\sqrt{(z(1-z^4))}}$$
$$= \mp\frac{1}{2\sqrt{2}\,.\cos\frac{1}{8}\pi}\int\frac{\Pi_1 w\cdot dw}{\sqrt{(w(1-w)(1-w\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi)(1+w\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi))}}$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\,.\cos\frac{1}{8}\pi}\int\frac{\Pi_2 w\cdot dw}{\sqrt{((1-w)(1-w\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi)(1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi))}},$$

welche für dieselben Grenzen wie die vorige gilt, und in der die beiden Integrale rechts elliptische Integrale sind, welche sich leicht auf die Normalform derselben reduciren lassen.

Setzt man nämlich im ersten Integral

$$w = \frac{\cos^2\varphi}{1-\tang^4 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\varphi},$$

so geht dasselbe, wenn man die durch die Substitution dieses Ausdrucks in die Function $\Pi_1 w$ hervorgehende Function durch $\boldsymbol{P}_1(\sin^2\varphi)$ bezeichnet, in

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi} \frac{\boldsymbol{P}_1(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\varphi)}}$$

über, wo für das obere Zeichen die Grenzen von w: 1 0,

$\quad - \quad - \quad - \quad - \quad \varphi$: 0 .... $\frac{1}{2}\pi$,

und für das untere Zeichen die Grenzen von w: 0 1,

$\quad - \quad - \quad - \quad - \quad \varphi$: $\frac{1}{2}\pi$ .... π sind.

Ferner setze man im zweiten Integral

$$w = \frac{1-\cotang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\psi}{1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\psi},$$

so geht dasselbe, wenn man die durch Substitution dieses Ausdrucks in die Function $\Pi_2 w$ hervorgehende Function durch $\boldsymbol{P}_2(\sin^2\psi)$ bezeichnet, in

$$\frac{\cotang \tfrac{1}{8}\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi} \frac{\boldsymbol{P}_2(\sin^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\psi)}}$$

über, wo die Grenzen von w: 1 0,

$\quad - \quad - \quad - \quad - \quad \psi$: 0 .... arc sin $=$ tang $\frac{1}{8}\pi$

sind. Man erhält hienach folgende Umformungen:

$$(C.) \qquad \sqrt{2}\int_0^{z} \frac{\boldsymbol{F}z\,dz}{\sqrt{(z(1-z^4))}}$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{\boldsymbol{P}_1(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\varphi)}} + \cotang \tfrac{1}{8}\pi \int_0^{\psi} \frac{\boldsymbol{P}_2(\sin^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\psi)}},$$

$$(D.) \qquad \sqrt{2}\int_1^{z} \frac{\boldsymbol{F}z\,dz}{\sqrt{(z(1-z^4))}}$$

$$= -\int_0^{\varphi} \frac{\boldsymbol{P}_1(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\varphi)}} + \cotang \tfrac{1}{8}\pi \int_0^{\psi} \frac{\boldsymbol{P}_2(\sin^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-\tang^2 \tfrac{1}{8}\pi \sin^2\psi)}},$$

wo die Argumente φ und ψ aus dem Argumente z durch die Formel

$$(E.) \qquad \tang \tfrac{1}{8}\pi \sin\varphi = \sqrt{\frac{z(1-z)}{1+z}} = \sin\psi$$

bestimmt werden, und φ, z, ψ respective die Grenzen

$$\tfrac{1}{2}\pi, \qquad \tang \tfrac{1}{8}\pi, \qquad \text{arc sin} = \tang \tfrac{1}{8}\pi$$

nicht überschreiten dürfen. Die Functionen $P_1(\sin^2\varphi)$ und $P_2\sin^2\psi$ werden durch die Gleichungen

$$2P_1(\sin^2\varphi) =$$

$$\left\{1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}}\right\}F\left(\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi-\cos\varphi\sqrt{(1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}}{2}\right)$$

$$+\left\{1-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}}\right\}F\left(\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi+\cos\varphi\sqrt{(1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}}{2}\right),$$

$$2P_2(\sin^2\psi) =$$

$$\left\{\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi+\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}{1-\operatorname{cotang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}}\right\}F\left(\frac{\cos^2\psi-\sqrt{((1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)(1-\operatorname{cotang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi))}}{2}\right)$$

$$+\left\{\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi-\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}{1-\operatorname{cotang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}}\right\}F\left(\frac{\cos^2\psi+\sqrt{((1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)(1-\operatorname{cotang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi))}}{2}\right)$$

bestimmt. Wenn man die Formeln (*C.*) oder (*D.*) in der Gleichung (*A.*) substituirt, so hat man das Integral

$$\int_0^x \frac{fx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$

durch elliptische Integrale dargestellt.

Um für die einfachsten Ausdrücke von fx die Rechnung ganz durchzuführen, werde ich die Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$

durch die obigen Substitutionsformeln (*E.*),

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}\pi\sin\varphi = x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \sin\psi,$$

umformen. Dieselben geben die Gleichungen,

$$\cos^2\varphi = \frac{(1-x^2\operatorname{cotang}\frac{1}{8}\pi)^2}{1+x^2}, \qquad \cos^2\psi = \frac{1+x^4}{1+x^2};$$

$$1-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi\sin^2\varphi = \frac{1+x^4}{1+x^2}, \qquad 1-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi\sin^2\psi = \frac{(1+x^2\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi)^2}{1+x^2},$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{8}\pi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{x(1-x^2\operatorname{cotang}\frac{1}{8}\pi)(1+x^2\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi)\,dx}{(1+x^2)^2} = \sin\psi\cos\psi\,d\psi,$$

woraus man die Umformungen erhält:

$$\int\frac{(x^2+\operatorname{cotang}\frac{1}{8}\pi)\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}},$$

$$\int\frac{(1-x^2\operatorname{cotang}\frac{1}{8}\pi)\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}},$$

Grenzen von x: $0 \ldots\ldots \sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi} \ldots\ldots 1$,

– – – φ: $0 \ldots\ldots \frac{1}{2}\pi \ldots\ldots \pi$,

– – – ψ: $0 \ldots \arcsin = \operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi \ldots 0$.

Aus ihnen ergeben sich sofort die Gleichungen:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}} + \sin^2\tfrac{1}{8}\pi\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}},$$

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}} + \sin^2\tfrac{1}{8}\pi\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}},$$

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \sin^2\tfrac{1}{8}\pi\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\psi)}},$$

$$\int_1^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = -\sin^2\tfrac{1}{8}\pi\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}},$$

in denen die obern Grenzen x, φ und ψ respective die Gröfsen

$$\sqrt{\tan\tfrac{1}{8}\pi},\quad \tfrac{1}{2}\pi,\quad \arcsin = \tan\tfrac{1}{8}\pi$$

nicht überschreiten dürfen. Für die bestimmten Integrale folgt hieraus

$$\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{8}\pi}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\tan^2\frac{1}{8}\pi\sin^2\varphi)}}.$$

Im 2ten Bande der „Theorie der elliptischen Functionen" S. 383 hat ***Legendre*** zur Reduction der beiden bestimmten Integrale links das ihnen äquivalente Integral

$$\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{8}\pi\int_0^1 \frac{(1+z^2)\,dz}{\sqrt{(1+z^8)}}$$

durch die Substitution

$$\frac{z}{1-z^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})}\tan\eta$$

in

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-(2\sqrt{2}-2)\sin^2\eta)}}$$

transformirt. Dieses Integral ist aber so beschaffen, dafs sein Modul sich durch die ***Landen***sche Substitution in sein Complement transformiren läfst, durch welche neue Transformation ***Legendre*** endlich das hier gefundne Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-(\sqrt{2}-1)^2\sin^2\varphi)}}$$

erhält. Dasselbe hätte auch nach der Methode gefunden werden können, durch welche ***Legendre*** im 32ten Capitel des ersten Bandes S. 254 VI. allgemein die Integrale

$$\int \frac{P\,dy}{\sqrt{(\beta+\gamma y^2+\delta y^4+\gamma y^6+\beta y^8)}}$$

auf elliptische zurückführt.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dafs die beiden Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x(1-x^2)(1-k^2x^2))}}, \quad \int \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{(x(1-x)(1-k^2\lambda^2x)(1+k^2x)(1+\lambda^2x))}},$$

von denen das erste von ***Legendre*** im 3ten Bande desselben Werks Seite 333, das andere von ***Jacobi*** in seinem Bericht über denselben im 8ten Bande des ***Crelle***schen Journals Seite 416 in zwei reelle elliptische Integrale zerlegt wird, durch die Substitution $x = \frac{y^2}{\sqrt{k}}$ oder $x = \frac{y^2}{k\lambda}$ in die eben erwähnte Form übergehen, in welcher die ganze rationale Function unter dem Wurzelzeichen eine gerade und reciproke vom 8ten Grade ist. Sie können also nach der von ***Legendre*** am angef. O. für solche Integrale angewandten Methode auf elliptische Integrale zurückgeführt werden, wobei es noch verstattet ist, für den Zähler des Ausdrucks unter dem Integralzeichen eine beliebige rationale Function von x zu setzen.

Königsberg, 3. Juni 1846.

23.

Beweis eines Satzes über elliptische Functionen.

(Von Herrn Prof. *F. Richelot* zu Königsberg.)

Der zu beweisende Satz ist folgender:

Der Ausdruck

$$\frac{(1-k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u_1)(1+k\sin\mathrm{am}\,u_2\sin\mathrm{am}\,u_3)}{(1+k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u_1)(1-k\sin\mathrm{am}\,u_2\sin\mathrm{am}\,u_3)}$$

bleibt ungeändert, wenn man statt der vier Gröfsen u, u_1, u_2, u_3 respective $\frac{1}{2}(u+u_1+u_2+u_3)$, $\frac{1}{2}(u+u_1-u_2-u_3)$, $\frac{1}{2}(u-u_1+u_2-u_3)$, $\frac{1}{2}(u-u_1-u_2+u_3)$ setzt.

Beweis. Aus der 7ten Formel des §. 18. der *Fundamenta* ergiebt sich die Formel

$$1\pm k\sin\mathrm{am}\,U\sin\mathrm{am}\,V=\frac{(1\pm k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(U+V))(1\mp k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(U-V))}{1-k^2\sin\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(U+V)\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(U-V)}.$$

Der obige Ausdruck geht daher in folgenden über:

$$\frac{(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u+u_1))(1+k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u-u_1))(1+k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_2+u_3))(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_2-u_3))}{(1+k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u+u_1))(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u-u_1))(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_2+u_3))(1+k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_2-u_3))},$$

welcher, da

$$\begin{aligned}
u+u_1&=\tfrac{1}{2}(u+u_1+u_2+u_3)+\tfrac{1}{2}(u+u_1-u_2-u_3),\\
u_2+u_3&=\tfrac{1}{2}(u+u_1+u_2+u_3)-\tfrac{1}{2}(u+u_1-u_2-u_3),\\
u-u_1&=\tfrac{1}{2}(u-u_1+u_2-u_3)-\tfrac{1}{2}(u-u_1-u_2+u_3),\\
u_2-u_3&=\tfrac{1}{2}(u-u_1+u_2-u_3)-\tfrac{1}{2}(u-u_1-u_2+u_3),
\end{aligned}$$

durch die angegebne Veränderung ungeändert bleibt.

Nennt man den vorgelegten Ausdruck w, und bildet die Gröfsen $\frac{1}{1+w}$, $\frac{w}{1+w}$, so erhält man einen zweiten Ausdruck, welcher nach obiger Substitution ungeändert bleibt,

$$\frac{(1\pm k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u_1)(1\mp k\sin\mathrm{am}\,u_2\sin\mathrm{am}\,u_3)}{1-k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u_1\sin\mathrm{am}\,u_2\sin\mathrm{am}\,u_3}.$$

Königsberg, den 21. Juni 1846.

24.

Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

Ich werde das System Differentialgleichungen

$$1.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \end{cases}$$

in welchem X_1, X_2, ... X_n dieselben ganzen Functionen $2n^{\text{ten}}$ Grades respective von den Variabeln x_1, x_2, ... x_n sind, und $n > 2$ ist, mit dem Namen *eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen* bezeichnen. Man weifs, dafs sie durch rein algebraische Gleichungen vollständig integrirt werden können. Wenn X_1 und X_2 vom 4ten Grade sind, hat *Euler* gefunden, dafs das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

eine Gleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Gröfsen

$$x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad x_1 x_2$$

ist. Die algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen hat man noch nicht in rationaler Form dargestellt, dürfte auch dazu von den bekannten Formeln aus durch Anwendung der gewöhnlichen Regeln zur Fortschaffung der Wurzelgröfsen nur mit Mühe gelangen, insbesondere wenn man eine solche rationale Form der Gleichungen zu erlangen wünscht, welche die Gewifsheit gewährt, dafs sie durch keine Combi-

nation derselben vereinfacht werden kann. Ich habe daher eine neue Integrationsmethode ersonnen, welche direct zu den rationalen algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen und zwar in ihrer einfachsten Form führt. Das von *Euler* gefundne Resultat wird hiedurch verallgemeinert. Ich finde nämlich, dafs das System von $n-1$ *rationalen* Gleichungen, durch welche das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen vollständig integrirt wird,

> aus *einer* Gleichung *zweiten* Grades zwischen der Summe der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Summe ihrer Amben und aus $n-2$ andern Gleichungen besteht, mittelst welcher durch diese beiden Gröfsen die Summe der Ternen, Quaternen etc. und das Product der Variabeln *lineär* ausgedrückt werden.

Ist X die Function unter dem Wurzelzeichen, wenn man x die Variable nennt, so mufs zur Bildung dieser Gleichungen die Function X durch die Form S^2-RT dargestellt werden, wo R, S, T ganze Functionen von x vom n^{ten} Grade sind. Die hiebei willkürlich anzunehmenden constanten Gröfsen geben, wie bei *Euler*, die willkürlichen Constanten, mit denen die rationalen Integralgleichungen behaftet sind.

Ich betrachte die Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T=0,$$

wo R, S, T ganze Functionen von x vom n^{ten} Grade sind. Dieselbe Gleichung nach x geordnet sei

$$2.\quad Yx^n-Y_1x^{n-1}+Y_2x^{n-2}\ldots\pm Y_n=Ry^2+2Sy+T=0,$$

wo Y, $Y_1, \ldots Y_n$ ganze Functionen von y vom 2ten Grade sind. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2\,dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Y_1x^{n-2}\ldots\mp Y_{n-1}}=0.$$

Nennt man

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

die n Werthe, welche x für ein gegebnes y annimmt, und R_i, S_i, T_i die durch Substitution von $x=x_i$ aus R, S, T erhaltnen Ausdrücke, so kann man dieser Differentialgleichung die Form

$$\frac{dx_i}{\sqrt{(S_i^2-R_iT_i)}}+\frac{2\,dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_n)}=0$$

geben, wo im Nenner des zweiten Gliedes der verschwindende Factor x_i-x_i auszulassen ist. Ist P_i eine rationale Function von x_i, und dehnt man die

Summen auf die n Werthe von i aus, so erhält man hieraus

$$\Sigma \frac{P_i\,dx_i}{\sqrt{(S_i^2 - R_i\,T_i)}} + Q\,dy = 0,$$

wo die Gröfse

$$Q = \frac{2}{Y}\Sigma \frac{P_i}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_n)}$$

mittelst der Gleichung (2.) eine rationale Function von y wird. Ist insbesondre P_i eine ganze Potenz von x_i, deren Exponent kleiner als $n-1$ ist, so verschwindet Q. Man erhält in diesem Fall das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.), wenn man auf irgend eine Weise drei ganze Functionen R, S, T vom n^{ten} Grade so bestimmt, dafs

$$SS - RT = X$$

wird.

Setzt man

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n - u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} \ldots \pm u_n,$$

wo u_1 die Summe der Gröfsen x_1, x_2, $\ldots$ x_n, und u_2, u_3 etc. die Summe ihrer Amben, Ternen u. s. w. bedeutet, so erhält man aus der Gleichung (2.),

$$3. \qquad u_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad u_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \ldots \quad u_n = \frac{Y_n}{Y}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von y eine Gleichung *zweiter* Ordnung zwischen u_1 und u_2. Denn die sechs Gröfsen

$$Y^2, \quad Y^2 u_1, \quad Y^2 u_2, \quad Y^2 u_1^2, \quad Y^2 u_1 u_2, \quad Y^2 u_2^2$$

werden ganzen Functionen von y vom 4ten Grade gleich, welche aus 5 Termen bestehen, und man kann daher, wenn man diese sechs Gleichungen mit constanten Factoren α, β etc. multiplicirt und addirt, eine Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta u_1 + \gamma u_2 + \delta u_1^2 + \varepsilon u_1 u_2 + \zeta u_2^2 = 0$$

erhalten. Man kann ferner, wenn Y_m eine der Functionen Y_3, Y_4, $\ldots$ Y_n ist, Y als einen lineären homogenen Ausdruck von Y_1, Y_2, Y_m darstellen,

$$Y = \varkappa_m Y_1 + \lambda_m Y_2 + \mu_m Y_m,$$

wo $\varkappa_m$, λ_m, μ_m Constanten sind, wodurch man zwischen je drei Gröfsen u_1, u_2, u_m eine Gleichung von der Form

$$\varkappa_m u_1 + \lambda_m u_2 + \mu_m u_m = 1$$

erhält. Es findet daher zwischen den Gröfsen u_1, u_2, $\ldots$ u_n eine Anzahl von $n-1$ Gleichungen Statt, von denen eine von der zweiten Ordnung ist und die andern lineär sind. Man sieht zu gleicher Zeit, dafs es unmöglich ist, diese Gleichungen, insofern man sie als Gleichungen zwischen den in den vorgeleg-

ten Differentialgleichungen (1.) enthaltnen Variabeln betrachtet, in eine einfachere Form zu bringen.

In den Ausdrücken von R, S, T kann man einen Coëfficient $= 1$ setzen; aufserdem aber kann man immer noch drei Coëfficienten beliebig annehmen, ohne dafs hiedurch die Allgemeinheit der Integralgleichungen beschränkt wird. Setzt man nämlich $\frac{my+n}{py+q}$ statt y, wo m, n, p, q beliebige Constanten sind, welche die Gleichung $mq-np=1$ erfüllen, so verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$R'y^2+2S'y+T' = 0,$$

wo

$$R' = m^2R+2mpS+p^2T, \qquad T' = n^2R+2nqS+q^2T,$$
$$S' = mnR+(mq+np)S+pqT, \qquad S'S'-R'T' = SS-RT.$$

Man kann daher die Constanten m, n, p, q z. B. so bestimmen, dafs in S zwei Coëfficienten $=0$ werden, und ein dritter einen gegebnen Werth erhält. Hierdurch reducirt sich die Zahl der in den Integralgleichungen enthaltnen Constanten auf

$$3(n+1)-4 = 3n-1.$$

Die Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten ist aber nur $2n$, weil dies die Anzahl der Coëfficienten von X ist, wenn man einen derselben $=1$ setzt. Da sich aus den angegebnen $n-1$ Gleichungen zwischen den Gröfsen u_1, u_2, ... u_n durch Einführung der Gröfse y die Gleichungen (3.), und aus diesen durch die obigen Betrachtungen die Differentialgleichungen (1.) ergeben, welche $n-1$ Constanten weniger als die zwischen den Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_n$ aufgestellten Gleichungen enthalten, so sind die letztern die vollständigen Integralgleichungen des aufgestellten Systems Differentialgleichungen (1.).

Um die gegebne Function X durch die Form S^2-RT darzustellen, könnte man alle Coëfficienten in S willkürlich annehmen, und hätte dann nur S^2-X in zwei Factoren R und T vom n^{ten} Grade zu zerfällen. Dies erfordert aber die Auflösung höherer Gleichungen. Man wird mit Ausziehung von Quadratwurzeln ausreichen, wenn man folgendermafsen verfährt.

Man bestimme, etwa durch die sogenannte *Lagrange*sche Interpolationsformel, eine ganze Function S vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche für n willkürlich angenommne Werthe von x,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_n,$$

dieselben Werthe annimmt, wie die irrationale Function $\sqrt{X}$. Nennt man diese Function S, so verschwindet $SS-X$ für diese n Werthe von x und mufs also durch

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

theilbar sein, wo f ein constanter Factor ist. Nennt man den Quotient R, so sind R, S, T die verlangten Functionen.

Man könnte S auch vom n^{ten} Grade annehmen, und noch die Bedingung hinzufügen, dafs es für einen neuen Werth $x = a$ einen bestimmten Werth erhalten soll. Nimmt man für letztern wieder den Werth von $\sqrt{X}$ für $x = a$, so würde man noch von R einen lineären Factor, nämlich $x - a$, kennen.

Für $y = 0$ reduciren sich die Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf $a_1, a_2, \ldots a_n$. Man erhält also, wenn man die Functionen R, S, T auf die angegebne Art bestimmt hat, die $n-1$ transcendenten Gleichungen,

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \int_{a_n}^{x_n} \frac{x_n^m\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

wo m jeden der Werthe $0, 1, 2, \ldots n-2$ annehmen kann.

Die Zeichen sämmtlicher Wurzelgröfsen $\sqrt{X_i}$ werden durch den Werth der einen Gröfse y mittelst der Gleichung

$$R_i y + S_i = \sqrt{X_i}$$

bestimmt. Man hat daher für zwei der Variabeln x_i und x_k,

$$\frac{-S_i + \sqrt{X_i}}{R_i} = \frac{-S_k + \sqrt{X_k}}{R_k},$$

durch welche Gleichung die Wurzelgröfsen von einander abhängen. Wenn y von 0 an sich continuirlich ändert, so werden auch die Gröfsen $\sqrt{X_i}$ respective von $\sqrt{A_i}$ an sich continuirlich ändern, wenn man A_i den Werth von X für $x = a_i$ nennt. Das Zeichen jeder Wurzelgröfse $\sqrt{X_i}$ wird daher auch aus dem Zeichen von $\sqrt{A_i}$ durch die Bedingung der Continuität bestimmt.

Man setze jetzt $U^2 X$ für X, wo U eine ganze Function von x von der p^{ten} Ordnung bedèutet. Es seien ferner R, S, T ganze Functionen von x von der $(n+p)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Gleichung

$$S^2 - RT = U^2 X$$

erfüllen, und $x_1, x_2, \ldots x_{n+p}$ die Wurzeln der Gleichung

$$Ry^2 + 2Sy + T = 0,$$

die einem Werthe von y entsprechen. Man erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{dx_i}{U_i \sqrt{X_i}} + \frac{2\,dy}{Y(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{n+p})} = 0,$$

wo Y der Coëfficient von x^{n+p} in der zwischen x und y aufgestellten Gleichung und U_i der Werth von U für $x = x_i$ ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $x_i^m U_i$, wo m wieder die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-2$ annehmen kann,

und summirt für alle $n+p$ Werthe von i, so erhält man, indem man dem m seine $n-1$ Werthe giebt, folgendes System von $n-1$ Differentialgleichungen zwischen den $n+p$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n+p}$,

$$3.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \frac{dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \frac{x_{n+p}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \frac{x_{n+p}^{n-2}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^{n+p} - Y_1 x^{n+p-1} + Y_2 x^{n+p-2} \ldots \pm Y_{n+p},$$

und nennt u_1, u_2, u_3 etc. die Summe der $n+p$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n+p}$, die Summe ihrer Amben, Ternen etc., so erhält man

$$u_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad u_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \ldots \quad u_{n+p} = \frac{Y_{n+p}}{Y},$$

und hieraus ergeben sich durch Elimination von y die algebraischen Integralgleichungen des Systems der Gleichungen (3.), nämlich *eine* Gleichung zweiter Ordnung zwischen u_1 und u_2 und andre $n+p-2$ Gleichungen, welche u_3, $u_4, \ldots u_{n+p}$ durch u_1 und u_2 lineär bestimmen. Setzt man

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+p}),$$

wo f eine Constante ist und man, ohne die Allgemeinheit der Integralgleichungen zu beeinträchtigen, für $p+1$ der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_{n+p}$ bestimmte Werthe annehmen kann, so wird S eine ganze Function $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, die, wenn man für x die $n+p$ Werthe $a_1, a_2, \ldots a_{n+p}$ setzt, dieselben Werthe wie die Function $U\sqrt{X}$ hat. Es wird dann $S^2 - U^2X$ durch T theilbar und der Quotient wird die Function R. Die mit den algebraischen Integralgleichungen identischen transcendenten werden

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \int_{a_{n+p}}^{x_{n+p}} \frac{x_{n+p}^m\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0,$$

so dafs man auch auf diesem neuen Wege die Addition auf eine beliebige Zahl Variabeln ausdehnen kann.

Wenn man wieder die Zahl der Variabeln auf n beschränkt, und zwischen u_1 und u_2 eine beliebige Gleichung zweiten Grades annimmt, so enthält diese 5 Constanten; wenn man ferner $u_3, u_4, \ldots u_n$ auf beliebige Art lineär

durch u_1 und u_2 ausdrückt, so enthält jede Gleichung, durch welche dieses geschieht, *zwei* Constanten. Die Zahl aller in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten ist daher $5+3(n-2)=3n-1$ oder gleich der Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten (der Coëfficienten von X, wenn man einen derselben $=1$ setzt) plus der Zahl der willkürlichen Constanten, welche die vollständigen Integralgleichungen enthalten müssen. Da man nun gezeigt hat, dafs letztere immer in die angegebne Form gebracht werden können, so folgt umgekehrt, dafs jedes System algebraischer Gleichungen von der angegebnen Form immer das System vollständiger Integralgleichungen von einem System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.) ist, wenn man die Coëfficienten der Function X unter dem Wurzelzeichen durch die Constanten der algebraischen Gleichungen gehörig bestimmt. Wenn man aber die angegebne Form der rationalen algebraischen Integralgleichungen für $n+p$ Variable anwenden will, so können hier nicht mehr alle Constanten der Gleichungen beliebig angenommen werden.

Man kann das gefundne Theorem auch folgendermafsen darstellen:

Setzt man

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (bx^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} \ldots + b_n)^2 \\ & + (cx^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} \ldots + c_n)^2 \\ & - (ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n)^2, \end{aligned}$$

so werden die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0, \\ \frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0 \end{aligned}$$

vollständig integrirt, wenn man für $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned} & ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n \\ = {} & (bx^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} \ldots + b_n)\cos\varphi \\ & + (cx^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} \ldots + c_n)\sin\varphi \end{aligned}$$

setzt, wo φ einen veränderlichen Winkel bedeutet.

Den 14. Juli 1846.

25.

Neue Eigenschaft zweier Kräfte, durch welche ein Kräftensystem ersetzt werden kann.

(Von dem Herrn Geh. Hofrath und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

§. 1. Soll ein Kräftensystem durch zwei Kräfte $Q_,$, $Q_{,,}$ ersetzt werden, so müssen dieselben nicht allein die gleichgerade fortgehenden Kräfte A, B, C nach den Richtungen der Coordinaten-Axen, sondern auch die gleichen Momente N, M, L um die Coordinaten-Axen x, y, z erzeugen. Wenn $X_,$, $Y_,$, $Z_,$, $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$ die Seitenkräfte und $x_,$, $y_,$, $z_,$, $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ die Coordinaten der Angriffspuncte der beiden Kräfte $Q_,$, $Q_{,,}$ sind, mufs also sein:

1. $A = X_, + X_{,,}$, $B = Y_, + Y_{,,}$, $C = Z_, + Z_{,,}$ und

2. $$L = y_,Z_, - z_,Y_, + y_{,,}Z_{,,} - z_{,,}Y_{,,},$$
$$M = z_,X_, - x_,Z_, + z_{,,}X_{,,} - x_{,,}Z_{,,},$$
$$N = x_,Y_, - y_,X_, + x_{,,}Y_{,,} - y_{,,}X_{,,}.$$

Je nachdem nun A, B, C, oder $X_,$, $Y_,$, $Z_,$, oder $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$, oder $x_,$, $y_,$, $z_,$, oder $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, oder mehrere von diesen zugleich eliminirt werden, entstehen verschiedene Gleichungen, unter welchen ich folgende besonders hervorhebe:

3. $$x_{,,}(Y_,Z_{,,} - Y_{,,}Z_,) + y_{,,}(Z_,X_{,,} - Z_{,,}X_,) + z_{,,}(X_,Y_{,,} - X_{,,}Y_,) + LX_, + MY_, + NZ_, = 0 \text{ und}$$

4. $$x_,(Y_,Z_{,,} - Y_{,,}Z_,) + y_,(Z_,X_{,,} - Z_{,,}X_,) + z_,(X_,Y_{,,} - X_{,,}Y_,) - LX_{,,} - MY_{,,} - NZ_{,,} = 0,$$

die, wenn

$$L - y_,Z_, + z_,Y_, = L_,, \quad L - y_{,,}Z_{,,} + z_{,,}Y_{,,} = L_{,,},$$
$$M - z_,X_, + x_,Z_, = M_,, \quad M - z_{,,}X_{,,} + x_{,,}Z_{,,} = M_{,,},$$
$$N - x_,Y_, + y_,X_, = N_,, \quad N - x_{,,}Y_{,,} + y_{,,}X_{,,} = N_{,,}$$

gesetzt wird, auch folgende Gestalt annehmen:

5. $X_, \cdot L_{,,} + Y_, \cdot M_{,,} + Z_, \cdot N_{,,} = 0$ und 6. $X_{,,} \cdot L_, + Y_{,,} \cdot M_, + Z_{,,} \cdot N_, = 0.$

§. 2. Im Anfangspuncte der Coordinaten-Axen nehme ich zwei Kräfte $Q'_,$, $Q'_{,,}$ an, parallel und gleich den Kräften $Q_,$, $Q_{,,}$. Da ihre Seitenkräfte $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ und $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$ mit A, B, C im Gleichgewicht sind, so sind auch diese beiden Kräfte $Q'_,$ und $Q'_{,,}$ mit E, der Mittelkraft von A, B, C, im Gleichgewicht, und liegen folglich mit dieser Mittelkraft E in einer und derselben Ebene. Für diese Ebene $(Q'_,\, Q'_{,,}\, E)$ ergiebt sich durch das bekannte Verfahren folgende Gleichung:

7. $$x(Y_,Z_{,,} - Y_{,,}Z_,) + y(Z_,X_{,,} - Z_{,,}X_,) + z(X_,Y_{,,} - X_{,,}Y_,) = 0,$$

welche ausdrückt, dafs die Ebene zu den beiden Ebenen (3.), (4.) parallel ist.

Da nun in dieser Ebene (7.) die Kraft $Q'_{,,}$ liegt, und in der zu ihr parallelen Ebene (3.) der Angriffspunct der ihr parallelen Kraft $Q_{,,}$ sich befindet, so liegt auch in der Ebene (3.) die Kraft $Q_{,,}$.

Eben so wird bewiesen, dafs in der Ebene (4.) die Kraft $Q_{,}$ liegt. Also:

8. ***Die beiden Kräfte $Q_{,}$ und $Q_{,,}$, durch welche ein Kräftensystem ersetzt werden kann, liegen in den parallelen Ebenen (4.) und (3.).***

§. 3. Die Gleichungen der Hauptdrehlinie oder der Axe der kleinsten Drehmomente des Kräftensystems sind bekanntlich:

$$y = \frac{B}{A}x + \frac{CK - NE^2}{AE^2}, \quad z = \frac{C}{A}x + \frac{-BK + ME^2}{AE^2},$$

wo $K = AL + BM + CN$ und $E^2 = A^2 + B^2 + C^2$ ist.

Diese und die identische Gleichung

$$A(Y_{,}Z_{,,} - Y_{,,}Z_{,}) + B(Z_{,}X_{,,} - Z_{,,}X_{,}) + C(X_{,}Y_{,,} - X_{,,}Y_{,}) = 0$$

geben folgende Eigenschaft der parallelen Ebenen (3.) und (4.):

9. ***Die parallelen Ebenen, in welchen die Kräfte $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ liegen, sind parallel zu der Hauptdrehlinie des Kräftensystems.***

Mit dieser Eigenschaft ist nothwendig folgende verbunden:

10. ***Die Linie, welche zu den beiden Linien, in welchen die Kräfte $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ wirken, senkrecht ist, liegt in einer zu der Hauptdrehlinie senkrechten Ebene.***

§. 4. Es findet noch eine dritte Eigenschaft Statt, auf welche hier das Hauptgewicht gelegt wird, nämlich: die Linie, welche zu den beiden Linien $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ senkrecht ist, oder welche durch ihre beiden nächsten Puncte geht, liegt nicht allein in einer zur Hauptdrehlinie senkrechten Ebene, ***sondern geht auch durch diese Hauptdrehlinie selbst.***

Diese Wahrheit bedarf zu ihrer Begründung mehr Rechnung. Sind

$$\mathfrak{A}. \begin{cases} y = ax + b, \\ z = a_{,}x + b_{,}, \end{cases} \quad \mathfrak{B}. \begin{cases} y = \alpha x + \beta, \\ z = \alpha_{,}x + \beta_{,}, \end{cases} \quad \mathfrak{C}. \begin{cases} y = \delta x + \theta, \\ z = \delta_{,}x + \theta_{,} \end{cases}$$

die Gleichungen dreier Linien, von welchen die letzte senkrecht zu den beiden ersten ist und durch ihre beiden nächsten Puncte geht, so ist bekanntlich

$$\delta = \frac{a_{,} - \alpha_{,}}{h}, \quad \delta_{,} = \frac{-a + \alpha}{h}, \quad \theta = \frac{\theta'}{mq - np}, \quad \theta_{,} = \frac{\theta'_{,}}{mq - np},$$

wo $h = a\alpha_{,} - a_{,}\alpha$, $m = -a_{,} + \alpha_{,} + ah$, $n = a - \alpha + a_{,}h$,

$p = -a_{,} + \alpha_{,} + \alpha h$, $q = a - \alpha + \alpha_{,}h$,

$\theta' = p(b_{,}m - bn) - m(\beta_{,}p - \beta q)$, $\theta'_{,} = q(b_{,}m - bn) - n(\beta_{,}p - \beta q)$.

Die dritte Linie $\mathfrak{C}$ soll zugleich durch eine vierte Linie gehen. Diese vierte Linie sei die Hauptdrehlinie, deren Gleichungen oben in §. 3. angegeben sind. Die Bedingungsgleichung, dafs die Linie $\mathfrak{C}$ die genannte Hauptdrehlinie durchschneide, ist

$$\mathfrak{D}.\quad \frac{\delta-\frac{B}{A}}{\delta,-\frac{C}{A}}=\frac{\theta-\frac{CK-NE^2}{AE^2}}{\theta,-\frac{-BK+ME^2}{AE^2}}.$$

Ich will nun beweisen, dafs diese Bedingungsgleichung ($\mathfrak{D}.$) in dem Falle Statt findet, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ diejenigen Linien sind, in welchen die Kräfte Q, und $Q_{,,}$ wirken.

Beweis. Die Gleichungen der Linien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind jetzt:

$$\mathfrak{A}.\quad \begin{cases} y=x\cdot\frac{Y,}{X,}-\frac{N_{,,}}{X,}, \\ z=x\cdot\frac{Z,}{X,}+\frac{M_{,,}}{X,}, \end{cases} \qquad \mathfrak{B}.\quad \begin{cases} y=x\cdot\frac{Y_{,,}}{X_{,,}}-\frac{N,}{X_{,,}}, \\ z=x\cdot\frac{Z_{,,}}{X_{,,}}+\frac{M,}{X_{,,}}. \end{cases}$$

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$Y,Z_{,,}-Y_{,,}Z, = CY,-BZ, = BZ_{,,}-CY_{,,} = l,,$$
$$Z,X_{,,}-Z_{,,}X, = AZ,-CX, = CX_{,,}-AZ_{,,} = l_{,,},$$
$$X,Y_{,,}-X_{,,}Y, = BX,-AY, = AY_{,,}-BX_{,,} = l_{,,,},$$
$$l,^2+l_{,,}^2+l_{,,,}^2 = v, \quad -l_2X,+l,Y, = m,, \quad -l_{,,,}X,+l,Z, = n,,$$
$$-l_{,,}X_{,,}+l,Y_{,,} = p,, \quad -l_{,,,}X_{,,}+l,Z_{,,} = q,,$$
$$M_{,,}m,+N_{,,}n, = D, \quad M,p,+N,q, = D,.$$

Dann ist

$$a=\frac{Y,}{X,}, \quad a,=\frac{Z,}{X,}, \quad \alpha=\frac{Y_{,,}}{X_{,,}}, \quad \alpha,=\frac{Z_{,,}}{X_{,,}},$$
$$b=-\frac{N_{,,}}{X,}, \quad b,=\frac{M_{,,}}{X,}, \quad \beta=-\frac{N,}{X_{,,}}, \quad \beta,=\frac{M,}{X_{,,}},$$
$$a-\alpha=\frac{-l_{,,,}}{X,X_{,,}}, \quad a,-\alpha,=\frac{l_{,,}}{X,X_{,,}}, \quad h=\frac{l,}{X,X_{,,}}, \quad \delta=\frac{l_{,,}}{l,}, \quad \delta,=\frac{l_{,,,}}{l,},$$
$$m=\frac{m,}{X,^2X_{,,}}, \quad n=\frac{n,}{X,^2X_{,,}}, \quad p=\frac{p,}{X,X_{,,}^2}, \quad q=\frac{q,}{X,X_{,,}^2},$$
$$mq-np=\frac{m,q,-n,p,}{X,^3X_{,,}^3}=\frac{l,v}{X,^3X_{,,}^3},$$
$$\theta'=\frac{p,DX_{,,}-m,D,X,}{X,^4X_{,,}^4}, \quad \theta,'=\frac{q,DX_{,,}-n,D,X,}{X,^4X_{,,}^4};$$

mithin, wenn $p,DX_{,,}-m,D,X,=U$ und $q,DX_{,,}-n,D,X,=V$ gesetzt wird:

$$\theta=\frac{U}{l,vX,X_{,,}}, \quad \theta,=\frac{V}{l,vX,X_{,,}}.$$

Die Bedingungsgleichung ($\mathfrak{D}.$) für das Durchschneiden der Linie $\mathfrak{C}$ und der Hauptdrehlinie des Kräftensystems ist also

$$\mathfrak{D}_1.\quad \frac{Al_{,,}-Bl,}{Al_{,,,}-Cl,}=\frac{UAE^2-(CK-NE^2)l,vX,X_{,,}}{VAE^2+(BK-ME^2)l,vX,X_{,,}}.$$

Diese Bedingungsgleichung mufs verschiedene Umwandlungen durchlaufen, ehe sie in einer Gestalt erscheint, die schon früher als wahr anerkannt ist. Zuerst bemerke ich, dafs $B(Al_{,,}-Bl,)+C(Al_{,,,}-Cl,)=-E^2l,$ ist.

Ich setze den dadurch entstandenen Factor E^2 bei Seite und führe die Producte wieder ein, welche durch U und V vertreten werden. Die Bedingungsgleichung wird folgende:

$$\mathfrak{D}_2. \quad \left\{ \begin{array}{l} (Al_{,,} - Bl_{,})(Aq, DX_{,,} - An, D, X_{,} - Ml, vX, X_{,,}) \\ -(Al_{,,,} - Cl_{,})(Ap, DX_{,,} - Am, D, X_{,} + Nl, vX, X_{,,}) - Kl, vX, X_{,,} \end{array} \right\} = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} (Al_{,,} - Bl_{,})q_{,} - (Al_{,,,} - Cl_{,})p_{,} &= -l, v, \\ -(Al_{,,} - Bl_{,})n_{,} + (Al_{,,,} - Cl_{,})m_{,} &= -l, v, \\ -(Al_{,,} - Bl_{,})M - (Al_{,,,} - Cl_{,})N - Kl_{,} &= -A(Ll_{,} + Ml_{,,} + Nl_{,,,}). \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen erhält die Bedingungsgleichung folgende einfachere Gestalt:

$$\mathfrak{D}_3. \quad DX_{,,} + D, X_{,} + (Ll_{,} + Ml_{,,} + Nl_{,,,}) X, X_{,,}.$$

Für D und $D_{,}$ führe man jetzt die durch sie vertretenen Producte ein und setze nach N. 2. $M_{,} = M - M_{,,}$ und $N_{,} = N - N_{,,}$, und zugleich

$$\begin{aligned} m, X_{,,} - p, X_{,} &= -l, l_3, \qquad n, X_{,,} - q, X_{,} = l, l_{,,}, \\ p_{,} + l_{,,} X_{,,} &= l, Y_{,,}, \qquad q_{,} + l_{,,,} X_{,,} = l, Z_{,,}. \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichung ist dann folgende:

$$-M_{,,} l_{,,,} + N_{,,} l_{,,} + X_{,}(LX_{,,} + MY_{,,} + NZ_{,,}) = 0,$$

oder, wenn für $M_{,,}$ und $N_{,,}$ die ihnen entsprechenden Gröfsen gesetzt werden:

$$\mathfrak{D}_4. \quad LX_{,} + MY_{,} + NZ_{,} + x_{,,} l_{,} + y_{,,} l_2 + z_{,,} l_{,,,} = 0.$$

Die Bedingungsgleichung für das Durchschneiden der beiden Linien, nämlich der Hauptdrehlinie des Kräftensystems und der Linie $\mathfrak{C}$, welche durch die beiden nächsten Puncte von $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ geht, ist also keine andere als die schon im Anfange der Untersuchung aufgestellte Gleichung (3.). Daher folgender Satz:

11. *Die beiden Linien, in welchen zwei Kräfte wirken, durch die ein Kräftensystem im Raume ersetzt, oder durch welche das Gleichgewicht hergestellt werden kann, durchschneiden rechtwinklig eine Linie, die durch die Hauptdrehlinie des Kräftensystems geht und senkrecht zu derselben ist* *).

Dieser Satz, den ich bei einer andern Untersuchung über Mechanik fand, halte ich für eine der Hauptwahrheiten bei zweien das Gleichgewicht herstellenden Kräften.

Durch den Beweis, den ich hier gegeben, wollte ich nur die gefundene Wahrheit aufser Zweifel setzen. Mit dem Aufsuchen eines einfacheren Beweises kann ich mich jetzt nicht befassen; ich mufs dies Andern überlassen.

*) Man kann sagen: Die beiden Linien, in welchen die beiden Kräfte $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ wirken, durchdringen rechtwinklig einen Hebelsarm, der an der Hauptdrehlinie, als Drehaxe, senkrecht angebracht ist.

26.

MÉMOIRE
sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer.

Une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits.

(Par l'éditeur.)

(Suite du No. 3 au premier et No. 14 au second cahier de ce tome.)

Locomotives à air de seconde sorte, où l'air comprimé n'est introduit dans les cylindres de propulsion, que durant une partie de la course des pistons.

a. Description de ces locomotives, et de leurs effets.

43.

On a observé que les machines à vapeur n'ont pas leur plus grand effet, si on laisse entrer la vapeur dans leurs cylindres pendant *toute* la course des pistons, de sorte que *tout* le volume des cylindres puisse se remplir de vapeur de la même tension que celle de la chaudière; on a trouvé qu'il est plus avantageux de fermer à la vapeur l'entrée dans les cylindres, *avant* que les pistons aient fini leur course, de sorte que la vapeur entrée seulement pendant *une partie* de la course des pistons, puisse se *dilater,* et de cette manière pousser les pistons avec une pression toujours décroissante jusqu'à la fin de la course. L'expérience a fait voir, que l'économie de force et de combustible qu'on obtient par cette *détente* de la vapeur est très-considérable.

Or comme la vapeur et l'air comprimé, quant à la force de propulsion de leurs tensions, ont parfaitement les mêmes propriétés, il faut que ce qui a été trouvé pour les machines *à vapeur,* le soit pareillement pour les machines *à air,* et par conséquent pour les locomotives à air. En effet, il est clair que si l'on fait agir la tension de l'air comprimé de la manière décrite (§. 32. *B.*), savoir si on laisse

sortir du cylindre l'air comprimé qui a poussé le piston, par ex. de gauche à droite (fig. 13), aussitôt que le piston commence son mouvement rétrograde, afin que cet air *comprimé* ne s'oppose pas au piston, et que celui-ci ne trouve devant lui que de l'air *atmosphérique:* il est clair, dis-je, qu'alors cet air comprimé s'en ira en *pure perte,* et qu'on éprouvera la perte d'une force effective qui peut-être pourrait encore être utilisée. On peut même avancer qu'il serait plus avantageux, et le plus avantageux, de ne laisser entrer dans le cylindre qu'une masse d'air comprimé telle, que sa tension, si le piston a continué sa course jusqu'au bout, ait diminué par la dilatation jusqu'à celle de *l'atmosphère* seule; et de fermer à l'air comprimé l'entrée dans le cylindre, déjà dans le moment où il n'a fait que *cette partie* de sa course, proportionnée à la dilatation mentionnée; car l'air qui sort *alors* de devant le piston, quand celui-ci fait son mouvement retrograde, *n'a plus* de force effective qui puisse encore être utilisée: il n'a plus que la tension de l'atmosphère elle même, de sorte qu'il n'y a plus alors aucune *perte.* Le calcul ci-dessous (§. 46. *H.* et *I.*) prouvera que cette prévision est parfaitement juste, et que le profit qu'offre cette disposition de la machine est *considérable.*

Avant d'entrer dans ce calcul, nous aurons à donner le détail de la description des changements à apporter dans la construction d'une locomotive à air pour obtenir le but demandé, c'est-à-dire pour opérer la détente de l'air comprimé, qui est entré dans le cylindre pendant une partie de la course du piston. La machine elle même n'éprouvera pas de changements; il s'agira seulement d'une autre construction des *cylindres* et des *tiroirs.*

44.

A. Supposons que l'entrée doive dejà être fermée à l'air comprimée quand le piston n'a encore achevé que la *partie*

324. $AC = k$ (fig. 19)

de sa course totale $AD = A_1D_1 = \lambda$. La figure 19, II. représente les cercles que décrivent autour du centre de l'essieu, les manivelles des roues de propulsion et les plus grand rayons des excentriques, qui impriment aux tiroirs leur mouvement de va-et-vient. La bielle et les tiges des pistons ne sont pas représentées ici comme dans les figures 13 et 16; cela étant superflu.

B. Supposons que la face *gauche* du piston se trouve en A (fig. 19, I.) quand le bras de la manivelle est dans la position AZ (II.); en B (I.) quand la manivelle est en BZ (II.); en C (I.) quand la manivelle est en CZ (II.); en D (I.) quand la manivelle est en DZ (II.); et que la face *droite* du piston

soit en E_1 (I.) quand le bras de la manivelle est dans la position EZ (II.), en F_1 (I.) quand la manivelle est en FZ (II.), et qu'enfin la face droite du piston se trouve en A_1 et la face gauche en A (I.) quand le bras de la manivelle est rentré dans la position AZ (II.), de sorte que AB (I.) $= AB_1$ (II.), AC (I.) $= AC_1$ (II.), AD (I.) $= AD_1$ (II.), D_1E_1 (I.) $= DE_1$ (II.) et D_1F_1 (I.) $= DF_1$ (II.).

C. Comme dans le cas où l'air comprimé pousse le piston, cet air ne doit entrer dans le cylindre que pendant ses courses de A en C et de D_1 et F_1, il faut que pendant que le piston fait le *reste* de ses courses de C en D et de F en A, les tuyaux d'entrée de l'air 1 et 2 soient fermés tous les deux. Or comme dans les locomotives de première sorte à un *seul tiroir* (fig. 13), l'air qui se trouve *devant* le piston, et qui est chassé par ce piston, ne peut sortir que par l'un ou par l'autre de ces deux tuyaux, cet air serait ici *enfermé* dans le cylindre, si les voies de sortie étaient fermées toutes les deux; le piston en continuant sa course le *comprimerait*, et l'air comprimé *s'opposerait* à son mouvement, au lieu de lui être utile. Par cette raison, il est clair qu'un *seul* tiroir ne peut suffire ici; au moins non pas sans lui donner une construction très-compliquée. Mais *deux* tiroirs, comme la figure 19. I. les indique, avec *deux* excentriques pour chaque cylindre, seront parfaitement propres à fonctionner dans le cas présent, avec les mêmes facilité et simplicité que le seul tiroir dans les locomotives de première sorte (fig. 13). Voici comment. (Les figures ne donnent qu'une esquisse de la construction.)

D. Soit V (fig. 19. I.) le tube et $a, a_{,,}$ la soupape *d'entrée*, et X le tube et $\alpha, \alpha_{,,}$ la soupape de *sortie* de l'air. Soit aZ (fig. 19. II.) le plus grand rayon du *premier* excentrique qui conduit la soupape $a, a_{,,}$ (I.), et αZ (II.) le plus grand rayon du *second* excentrique qui conduit la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ (I.).

Supposons que le premier excentrique soit dans la position aZ (II.) et la soupape $a, a_{,,}$ dans la position $a, a_{,,}$, tandis que le bras de la manivelle est dans celle αZ (II.). En *même temps* soit le second excentrique dans la position αZ (II.) et la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ dans la position $\alpha, \alpha_{,,}$. Cela étant, les tuyaux 1, 2, 3 et 4 seront fermés *tous les quatre.*

Maintenant, si la manivelle parcourt l'angle $AZB = aZb$ (II.), de sorte que la face gauche du piston se meuve de A en B (I.), le premier excentrique aZ (II.) passera de aZ en bZ (II.), et la soupape $a, a_{,,}$, qui est poussée par cet excentrique en sens *opposé* au moyen d'un levier à deux bras, comme dans fig. 13, passera de $a, a_{,,}$ en $b, b_{,,}$ (I.); l'autre excentrique

αZ (II.) passera de αZ en βZ (l'angle $\alpha Z\beta$ étant supposé égal à AZB), et la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ tirée par ce second excentrique, en sens *direct* sans levier, passera de $\alpha, \alpha_{,,}$ en $\beta, \beta_{,,}$. Il faut pour cela que la largeur de la bouche du tuyau 1 ne soit pas moindre que $bc_{,}$. Donc, pendant que le bras de la manivelle a parcouru l'angle AZB, le port 1, ainsi que celui 4, a été *ouvert*, tandis que les ports 2 et 3 ont été *fermés* comme auparavant. L'air comprimé pouvait donc *entrer derrière* le piston dans l'espace AB du cylindre par le port 1, et l'air *devant* le piston pouvait *sortir* par le port 4.

Si la manivelle, en continuant sa rotation, parcourt l'angle $BZC = bZc$ (II.) et que par là la face gauche du piston passe de B en C, le premier excentrique prendra la position cZ (II.) et la soupape $a, a_{,,}$ passera de $b, b_{,,}$ en $c, c_{,,}$ c'est-à-dire elle *rentrera* dans sa première position $a, a_{,,}$; le second excentrique αZ (II.) prendra la position γZ (l'angle $\beta Z\gamma$ étant supposé égal à $BZC = AZC$), et la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ passera outre, de $\beta, \beta_{,,}$ en $\gamma, \gamma_{,,}$. Donc pendant la course de la manivelle de B en C, les tuyaux 1 et 4 ont été encore ouverts et les tuyaux 2 et 3 fermés; en tout point comme auparavant. L'air comprimé a donc pu entrer derrière le piston dans l'espace AC (I.) du cylindre pendant toute la course de la manivelle de A jusqu'en C (II.).

Si la manivelle passe outre, de C en K (II.), de sorte que le piston passe de son côté de C en K (I.), le premier excentrique passera de Zc en Zk (II.) et fera continuer à la soupape $a, a_{,,}$ (I.) sa course de $c, c_{,,}$ jusqu'en $k, k_{,,}$; le second excentrique passera de $Z\gamma$ en Zz (II.) et fera également continuer à la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ sa course de $\gamma, \gamma_{,,}$ en $z, z_{,,}$. Donc, pendant cette partie du mouvement les *trois* tuyaux 1, 2 et 3 (I.) étaient *fermés* et le port 4 *seul* était ouvert. L'air comprimé ne pouvait donc plus entrer dans le cylindre *derrière* le piston, mais l'air qui se trouvait *devant* le piston, pouvait continuer à sortir par le port 4.

Si enfin la manivelle finit son *demi-tour*, en passant de K en D (II.), et en conduisant le piston de K en D (I.), le premier excentrique passera de Zk en Zd et fera *continuer* à la soupape $a, a_{,,}$ (I.) son mouvement de $k, k_{,,}$ en $d, d_{,,}$; le second excentrique passera de Zz en $Z\delta$ (II.) et fera *retourner* la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ (I.) de $z, z_{,,}$ en $\delta, \delta_{,,}$, c'est-à-dire en $\alpha, \alpha_{,,}$. Donc, pendant cette dernière partie du demi-tour de la manivelle, les *trois* tuyaux 1, 2, 3 (I.) étaient *fermés*, et le seul tuyau 4 était ouvert. L'air comprimé ne pouvait entrer dans le cylindre *derrière* le piston, mais l'air qui se trouvait *devant* le piston pouvait encore continuer à sortir par le port 4.

Donc l'air contenu dans le cylindre ***devant,*** ou à la droite du piston, pouvait en ***sortir*** par le tuyau 4 pendant ***toute*** la course du piston de A en D, ou pendant tout le demi-tour de la manivelle; mais l'air ***comprimé*** ne pouvait ***entrer*** dans le cylindre derrière le piston, ou à sa gauche, que pendant la course du piston de A en C par le port 1 et le tube V; et c'est ce qui est demandé. Les tuyaux 2 et 3 étaient fermés tous les deux, pendant toute la course du piston de A en D.

E. Pendant le ***retour*** du piston de D en A (I.), c'est-à-dire pendant le second demi-tour de la manivelle, tout se passe comme auparavant, mais en sens ***inverse.***

Si la manivelle passe de D par E en F (II.), et que par conséquent le piston retourne de D_1 par E_1 en F_1, le premier excentrique passera de Zd par Ze en Zf et poussera la soupape $a, a_{,,}$ (I.) d'abord de $d, d_{,,}$ en $e, e_{,,}$, et puis de $e, e_{,,}$ en $f, f_{,,}$ c'est-à-dire jusque dans sa première position $d, d_{,,}$. Donc, pendant tout ce mouvement le port 2 reste ***ouvert,*** et l'air comprimé peut ***entrer*** par les tuyaux 2 et V dans l'espace D_1F_1 du cylindre à ***droite*** du piston. Le second excentrique passera de $Z\delta$ par $Z\varepsilon$ en $Z\varphi$ (II.) et tirera la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ (I.) de $\delta, \delta_{,,}$ par $\varepsilon, \varepsilon_{,,}$ en $\varphi, \varphi_{,,}$; il ouvrira donc le port 3 et fermera celui 4, de sorte que l'air qui se trouve à gauche du piston pourra ***sortir*** par les tuyaux 3 et X.

Si la manivelle continue sa rotation de F par L en A (II.), de sorte que la face droite du piston passe de F_1 (I.) par L_1 en A_1, le premier excentrique passera de Zf (II.) par Zl en Za et fera continuer à la soupape $a, a_{,,}$ (I.) son mouvement de $f, f_{,,}$ par $l, l_{,,}$ en $a, a_{,,}$; il fermera donc les deux conduits 1 et 2, et l'air ***comprimé*** ne pourra plus entrer dans le cylindre. Le second excentrique passera de $Z\varphi$ (II.) par $Z\lambda$ en $Z\alpha$, et tirera la soupape $\alpha, \alpha_{,,}$ (I.) d'abord de $\varphi, \varphi_{,,}$ en $\lambda, \lambda_{,,}$ et puis de là jusque dans sa première position $\alpha, \alpha_{,,}$; le port 3 continuera donc d'être ouvert et celui 4 d'être fermé, de sorte que l'air qui se trouve à ***gauche*** du piston pourra toujours sortir par 3.

Donc aussi pendant tout le ***second*** demi-tour de la manivelle, c'est-à-dire pendant le ***retour*** du piston de D en A (I.), l'air qui se trouve ***devant*** lui (maintenant à sa ***gauche***), peut sortir par le tuyau 3, tandis que l'air ***comprimé*** ne peut entrer dans l'espace à ***droite*** du piston que pendant la course du piston de D_1 en F_1; comme cela doit être.

Pendant les tours suivants de la manivelle ce sera toujours la répétition de ce qu'on vient de décrire.

F. On voit par là que jamais l'air *comprimé* ne peut entrer ici dans les cylindres derrière le piston que pendant les *parties* $AC = D_1F_1 = k$ (I.) de la course du piston, pour le pousser devant lui. Mais l'air qui se trouve *devant* le piston peut toujours *sortir* du cylindre pendant les courses *entières* du piston, de sorte que *cet air* n'est jamais *comprimé;* seulement la tension de *l'atmosphère* s'opposera au piston, et celle de l'air comprimé pourra agir sur le piston avec *toute sa force.*

G. C'est ainsi que se passent les choses dans le cas où les *pistons* des cylindres doivent mettre en mouvement les *manivelles* pour transporter le train des wagons. Mais il faut voir encore ce qui arriverait si au contraire les *manivelles* poussaient les *pistons,* comme cela a lieu dans le cas où le train descend une rampe si roide que la gravité produit un excédant de force sur celle de la traction nécessaire.

45.

A. Le mouvement des deux soupapes $a, a_{,,}$ et $\alpha, \alpha_{,,}$ (fig. 19. I.) est absolument le même, quel que soit l'air qui entre dans les cylindres derrière les pistons: comprimé, ou non-comprimé, ou même raréfié: car ce mouvement dépend uniquement de celui de la manivelle et des excentriques, c'est-à-dire de la rotation des roues de propulsion.

B. Dans le moment où le piston commence son mouvement de *A* en *D* (I.) les tuyaux 1 et 4, comme il a été expliqué dans le paragraphe précédent, s'ouvrent, et les tuyaux 2 et 3 se ferment. Donc, si de l'air *comprimé* n'est pas *nécessaire* pour pousser les pistons, et qu'à sa place on laisse entrer par *V* de l'air *atmosphérique* dans les cylindres, cet air entre derrière et devant les pistons, savoir par 1 dans *AC,* et par 4 dans *CD.* Le piston n'est donc poussé par aucune force, ni en avant, ni en arrière.

C. Mais c'est ce qui n'a lieu que pendant la course du piston de *A* en *C.* Pendant le *reste* de sa course de *C* en *D* le port 4 seul, suivant l'explication ci-dessus, reste *ouvert,* les trois autres tuyaux 1, 2 et 3 restent *fermés.* Donc il ne peut plus entrer d'air atmosphérique *derrière* le piston, et celui qui a rempli l'espace *AC* est forcé de se *dilater* dans l'espace *AD.* Mais l'espace du cylindre à droite du piston continue d'être en communication avec l'atmosphère, et par conséquent la tension de celle-ci produit une pression sur le piston qui l'emporte sur celle de l'air *dilaté* à gauche du piston; le piston éprouvera donc une *résistance,* et cette résistance, produite ici, non arbitrairement, mais inévitablement, sert à modérer la vitesse du train.

D. Aussitôt que le piston retourne de D_1 en A_1, les ports 2 et 3 s'ouvrent, et ceux 1 et 4 se ferment. Donc il entre maintenant par le tuyau 3 de l'air atmosphérique dans l'espace DA du cylindre qui ne contenait plus que de l'air *raréfié.* Par le tuyau 2 il entre également dans D_1F_1 de l'air atmosphérique, mais seulement jusqu'à ce que le piston soit arrivé en F_1. Dès ce moment le port 2 est fermé pour le reste de la course du piston de F_1 en A_1, et seulement le port 3 est encore ouvert. Il faut donc que maintenant l'air enfermé dans D_1F_1 se ***dilate*** dans l'espace D_1A_1, tandis que l'air entré par le tuyau 3 s'oppose au mouvement du piston.

E. Donc, si on laisse entrer l'air atmosphérique dans le cylindre par les deux tubes X et V en même temps, aucune force d'air n'agit plus sur le piston pendant les parties $AC = D_1F_1 = k$ de ses courses; mais pendant les restes $CD = F_1A_1 = \lambda - k$ des courses, un excédant de la tension de l'atmosphère sur la tension de l'air, qui dans le cylindre s'est ***dilaté*** de l'espace k jusque dans l'espace λ, ***s'oppose*** au mouvement du piston.

F. Si on ne laisse entrer l'air atmosphérique dans le cylindre que par le tube V, et que par l'autre tube X on met en communication le cylindre avec un ***bassin fermé,*** que nous désignerons par B, le piston poussera d'abord à sa première course de A vers D dans ce bassin l'air qui se trouve à sa droite, tandis que l'air à gauche du piston se dilatera de k en λ. Donc la pression sur le piston de gauche à droite ***diminuera*** successivement pendant que celle de droite à gauche ***augmentera.*** Pendant le retour du piston, les tuyaux 2 et 3 s'ouvrent, l'air du bassin B rentre dans l'espace A_1D_1 dans lequel il ne se trouvait que de l'air raréfié; il a donc devant le piston une tension plus forte que celle de l'atmosphère; derrière le piston, en D_1F_1, entre de nouveau de l'air atmosphérique qui se dilate de $D_1F_1 = k$ en $D_1A_1 = \lambda$. L'air devant le piston, qui est déjà comprimé, est poussé de nouveau dans le bassin B, et ainsi de suite; et il est facile de voir qu'à chaque course du piston une masse d'air atmosphérique qui remplirait l'espace $AC = k$, est introduite dans le bassin B; car cet air, entré par V à chaque coup de piston, ne sort jamais par V, mais toujours par X, et s'introduit par conséquent dans le bassin B.

Donc la locomotive de la seconde sorte a aussi la faculté de puiser de l'air de l'atmosphère et de le comprimer dans un bassin pendant la durée de sa course. Les pistons éprouvent par là une résistance toujours croissante. Les locomotives de la première sorte diffèrent seulement de celles de la seconde

en ce que la machine n'introduit pas ici à chaque coup de piston deux cylindres *entiers* d'air atm. dans le bassin, mais seulement *cette masse* d'air qui remplit les deux espaces AC et F_1D_1.

G. On pourrait aussi *fermer entièrement* à l'air atmosphérique l'entrée par le tube V, par un robinet placé par ex. tout près et au dessus de la soupape $a, a_{,,}$, tandis que le cylindre est mis en communication avec un bassin fermé B par le tube X. Alors aucun air ne sera introduit dans ce bassin, hors le peu d'air, qui occupe les tuyaux 1 et 2 et l'espace au dessus de la soupape $a, a_{,,}$. Alors il s'opposerait au piston alternativement la pression de l'air du bassin, avec une tension qui de 1 augmente jusqu'à celle que produit la compression qui y est effectuée par l'introduction de la masse d'air occupant l'espace $AD = D_1A_1$.

H. En fermant complètement V et laissant ouvert X, la tension de l'atmosphère s'opposera continuellement au piston.

I. Si enfin, après avoir fermé, comme auparavant V, et ouvert X, on pouvait fermer X précisément dans les moments où le piston a fini sa course de gauche à droite ou de droite à gauche, c'est-à-dire dans les moments où l'air devant le piston est sorti, le piston fonctionnerait dans un espace presque vide, et il ne serait poussé par aucune force. Cela ne serait peut-être pas tout-à-fait impraticable, parcequ'on pourrait bien établir un appareil, au moyen duquel, aussitôt qu'il est mis en mouvement, le piston lui même fermât le tube X dans les moments où il vient achever ses courses de va-et-vient.

K. Il est clair que les deux soupapes $a, a_{,,}$ et $\alpha, \alpha_{,,}$ doivent marcher en coulisses, parceque l'air les presse aussi bien de dehors en dedans que de dedans en dehors.

Nous aurons maintenant à calculer les effets de la machine que nous venons de décrire.

b. Calcul de l'effet que la tension de l'air dans une locomotive à air de la seconde sorte exerce sur un train de wagons.

46.

A. Les notations seront les mêmes que celles du (§. 34.).

Comme on l'a fait remarquer (§. 34. *D.*), l'expression de la différentielle du *moment* de la force p ne change pas si cette force, au lieu d'être *constante,* est *variable.* Dans les deux cas on a suivant (§. 24. *I.*)

325. $\partial M = 2p\partial x$ pour *un* des deux cylindres.

B. En (§. 34. ***K.***) la pression p sur le piston est ***constante*** pendant ***toute*** sa course, c'est-à-dire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2r = \lambda$, et cette pression est

326. $p = \frac{1}{4}\pi \Delta^2 \mu\sigma$ (152) pour ***un*** cylindre.

Dans le cas actuel p n'est ***constant*** que depuis $x = 0$ jusqu'à $x =$ ***AC*** (fig. 19) $= k$. Depuis $x = AC = k$ jusqu'à $x = AD = 2r = \lambda$, p est ***variable,*** parceque l'air qui a occupé l'espace ***AC,*** se ***dilate*** peu à peu dans l'espace ***AD.*** Le moment M a donc ici ***deux parties différentes,*** M_1 et M_2, dont l'une doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = k$, l'autre depuis $x = k$ jusqu'à $x = 2r = \lambda$.

C. Pour la première partie M_1 on a suivant (325) (p étant ***constant*** et de la valeur (326)),

327. $\partial M_1 = \frac{1}{2}\pi \Delta^2 \mu\sigma \partial x$, et par conséquent

328. $M = \frac{1}{2}\pi \Delta^2 \mu\sigma x +$ const.

Comme $M_1 = 0$ pour $x = 0$, const. est $= 0$, et x étant posé $= k$, on obtient pour ***toute la première partie du moment:***

329. $M_1 = \frac{1}{2}\pi \Delta^2 \mu\sigma k$ pour ***un*** cylindre.

D. Pour calculer la ***seconde*** partie du moment, il faut observer que l'air qui occupe l'espace ***AC*** et qui y a la tension $1 + \mu$, se ***dilate*** de la manière suivante. Si le piston s'est éloigné de ***A*** à la distance $x > k$, la tension de l'air a diminué jusqu'à $(1+\mu)\frac{k}{x}$, et la force avec laquelle l'air ainsi dilaté continue de pousser le piston, est $(1+\mu)\frac{k}{x} - 1$, car la tension 1 de ***l'atmosphère s'oppose*** au piston. Donc l'expression générale de p pour toute la ***seconde*** partie du moment est

330. $$p = \tfrac{1}{4}\pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)\frac{k}{x} - 1\right]$$

et on a en vertu de (325)

331. $$\partial M_2 = \tfrac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)\frac{k}{x} - 1\right]\partial x.$$

L'intégrale de cette différentielle est

332. $M_2 = \frac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma[(1+\mu)k \log \text{nat}\, x - x] +$ const.

Comme $x = k$ pour $M_2 = 0$, on a const. $= \frac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma[k - (1+\mu)k \log \text{nat}\, k]$, et par conséquent $M_2 = \frac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)k \log \text{nat}\, \frac{x}{k} + k - x\right]$, et cela, en posant $x = \lambda$, donne pour le moment ***total:***

333. $$M_2 = \tfrac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)k \log \text{nat}\, \frac{\lambda}{k} + k - \lambda\right].$$

E. La ***somme*** des deux moments M_1 et M_2 (329 et 333) donne le moment M pour tout un tour des roues de propulsion; car suivant (§. 34. ***I.***) le moment pour le demi-cercle ***inférieur DLA*** est déjà compris dans l'expression (325). Donc le moment total pour un tour de la manivelle et pour ***les deux*** cylindres de propulsion est

$$334. \quad M = \pi \Delta^2 \sigma \left[(1+\mu) k \left(\log \text{nat} \frac{\lambda}{k} + 1 \right) - \lambda \right].$$

F. Ce moment est produit par ***quatre cylindres*** d'air comprimé à la tension $1+\mu$. Désignons cette masse d'air par a, on a

$$335. \quad a = \pi \Delta^2 (1+\mu) k \text{ mèt. cub. d'air } \textit{atmosphérique}.$$

Substituant cette expression de a dans (334), on obtient

$$336. \quad M = a \sigma \left(\log \text{nat} \frac{\lambda}{k} + 1 - \frac{\lambda}{(1+\mu) k} \right).$$

G. Comme dans cette expression de M la valeur de k est ***arbitraire,*** il s'agit de savoir, quelle est la valeur de k qui donne le ***maximum*** du moment M. Cette valeur sera celle pour laquelle $\log \text{nat} \frac{\lambda}{k} + 1 - \frac{\lambda}{(1+\mu) k}$, ou bien

$$337. \quad \log \text{nat} \lambda - \log \text{nat} k + 1 - \frac{\lambda}{(1-\mu) k} = \text{max.};$$

car a est ***indépendant*** de k.

La ***première*** différentiation de (337) suivant k donne

$$338. \quad -\frac{1}{k} + \frac{\lambda}{(1+\mu) k^2} = \partial \text{ max.} = 0;$$

la ***seconde*** différentiation donne

$$339. \quad \frac{1}{k^2} - \frac{2}{(1+\mu) k^3} = \partial^2 \text{ max.}$$

De (338) on tire $(1+\mu) k - \lambda = 0$ et

$$340. \quad k = \frac{\lambda}{1+\mu},$$

et cela étant substitué dans (339), donne

$$341. \quad -\frac{(1+\mu)^2}{\lambda^2} = \partial^2 \text{ max.}$$

Cette valeur de ∂^2 max. est ***toujours négative,*** donc $k = \frac{\lambda}{1+\mu}$ (340) donne effectivement un ***maximum,*** et non pas un ***minimum***.

H. Substituant la valeur k (340) trouvée pour le maximum dans l'expression du moment (334), on obtient $M = \pi \Delta^2 \sigma [\lambda (\log \text{nat}(1+\mu) + 1) - \lambda]$, ou bien

$$342. \quad M = \pi \Delta^2 \sigma \lambda \log \text{nat}(1+\mu).$$

Voilà le *maximum* du moment que la masse d'air atmosphérique

343. $$a = \pi \Delta^2 (1+\mu) k \text{ (335)} = \pi \Delta^2 \lambda \text{ (340)}$$

pourra produire. En substituant (343) dans (342), le moment M pourra aussi être exprimé par

344. $$M = a\sigma \log \text{nat}(1+\mu).$$

I. La masse d'air atmosphérique $a = \pi \Delta^2 \lambda$ (343) est, comme on le voit, précisément celle, *qui occuperait le volume de quatre cylindres.* On conclura donc que pour produire le moment *maximum*, il faut *comprimer* jusqu'à la tension $1+\mu$ une masse d'air *atmosphérique* qui occuperait quatre cylindres de propulsion; qu'il faut introduire cet air comprimé dans un espace AC qui est la $(1+\mu)^{\text{ième}}$ partie du volume des cylindres, et qu'ensuite il faut laisser se dilater cet air comprimé dans les cylindres mêmes jusqu'à la tension 1 de l'atmosphère seule, pendant que l'air pousse devant lui le piston avec une tension toujours décroissante depuis $1+\mu$ jusqu'à 1. Car lorsque le piston est arrivé à l'extrémité D du cylindre, la tension $1+\mu$ de l'air qui le pousse a diminué jusqu'à $(1+\mu)\frac{AC}{AD} = (1+\mu)\frac{k}{\lambda} = (1+\mu)\frac{1}{1+\mu}$ (340) $= 1$, ce qui n'est plus que la tension de l'atmosphère.

K. Si à k, dont la valeur était *arbitraire*, on avait donné celle $k = \lambda$, c'est-à-dire, si on avait supposé que l'air comprimé dût entrer dans le cylindre pendant *toute* la course du piston, comme dans les locomotives à air de la *première* sorte, la valeur de M (334), relative à cette supposition, aurait été $\overset{1}{M} = \pi \Delta^2 \sigma[(1+\mu)\lambda(\log \text{nat}\, 1 + 1) - \lambda]$ ou bien

345. $$\overset{1}{M} = \pi \Delta^2 \mu \lambda \sigma.$$

Cette expression du *moment* de la force de l'air coïncide, comme il le faut, avec ce que donne (329) pour $k = \lambda$, et avec (153. §. 34. *L.*).

L. Puis la formule (335) donne pour $k = \lambda$,

346. $$\overset{1}{a} = \pi \Delta^2 (1+\mu)\lambda,$$

et cela, substitué dans (345), donne

347. $$\overset{1}{M} = \sigma \overset{1}{a} \frac{\mu}{1+\mu}.$$

Maintenant, si l'on veut que

348. $$\overset{1}{a} = a,$$

c'est-à-dire que dans les deux locomotives à air, la *même masse* d'air atmosphérique doive être comprimée à la *même tension* $1+\mu$, où alors seulement Δ et λ

auront des valeurs différentes, on tire de (344 et 347)

$$349.\quad \begin{cases} 1.\quad M = a\sigma \log \text{nat}(1+\mu) \quad \text{pour} \quad k = \dfrac{\lambda}{1+\mu}, \text{ et} \\ 2.\quad \overset{1}{M} = a\sigma \cdot \dfrac{\mu}{1+\mu} \qquad\qquad \text{pour} \quad k = \lambda, \end{cases}$$

et de là

$$350.\quad \frac{M}{\overset{1}{M}} = \frac{1+\mu}{\mu} \log \text{nat}(1+\mu):$$

donc le moment M pour les locomotives de la *seconde* sorte, est toujours plus fort que celui $\overset{1}{M}$ pour les locomotives de la *première* sorte. La formule (350) donne

$$351.\quad \frac{M}{\overset{1}{M}} = \begin{matrix} \text{Pour } \mu = 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1{,}648 & 1{,}848 & 2{,}012 & 2{,}150 & 2{,}270 & 2{,}377 & 2{,}472 & 2{,}558 & 2{,}637, \end{matrix}$$

et ces nombres expriment les *multiples* que M est de $\overset{1}{M}$.

Donc il s'en suit que les locomotives à air de la *seconde* sorte, sont beaucoup plus efficaces et plus avantageuses que celles de la première sorte. En même temps les résultats du calcul confirment précisément ***ce qui a été avancé (§. 43)***, savoir, qu'on obtiendra le plus grand effet si l'on ferme à l'air comprimé l'entrée dans le cylindre de manière que la tension de cet air, qui en se *dilatant* dans ce cylindre pousse devant lui le piston, diminue peu-à-peu jusqu'à la tension de l'atmosphère seule, avec laquelle il est enfin chassé du cylindre, de sorte qu'aucune force d'air n'est perdue.

47.

A. Quel que soit le moment M de la force de l'air (334), ou la force de traction, ou la tension $1+\mu$ de l'air comprimé, à laquelle on veut adapter la valeur de k suivant (340) pour produire le maximum d'effet: cette valeur de k, une fois adoptée, ne conviendra plus qu'à la tension $1+\mu$ même, pour laquelle on a fixé k (tension que nous désignerons, pour la distinguer des autres, par $1+\mu_1$), ainsi qu'à la force de traction qui lui correspond. Si une fois k a reçu une valeur déterminée, il ne peut plus être changé, au moins pendant un même trajet des wagons, puisque les excentriques, dont la position est déterminée par la valeur de k, doivent être *fixés* sur l'essieu de propulsion. Or si *pendant* le trajet un air, comprimé à une tension ***moins forte*** que $1+\mu_1$, est introduit dans les cylindres, parcequ'un tel air *suffit* pour produire la force de traction sur une pente plus faible de la voie, la tension de cet air, qui se dilatera pendant que le piston se meut de C en D, ne dimi-

nuera pas seulement jusqu'à 1, mais encore j'usqu'à une tension *encore plus faible*, et par conséquent la pression de l'atmosphère *s'opposera* au piston vers la fin de sa course. Si au contraire un air comprimé à une tension *plus forte* que $1+\mu_1$ est introduit dans les cylindres, parceque la résistance des wagons sur une plus forte pente de la voie l'exige, la tension de cet air, qui se dilatera pendant la course du piston de ***C*** en ***D***, ne diminuera *pas complétement* jusqu'à 1, et il s'échappera des cylindres avec une tension plus forte encore que celle de l'atmosphère.

Or la résistance des wagons, et par conséquent la force nécessaire de traction, est effectivement loin d'être *égale* sur toute la voie; elle sera variable, et très-variable, si les pentes de la voie le sont: il faut donc aussi que la tension de l'air comprimé introduit dans les cylindres soit également très-variable. Donc il y a à chercher quel sera le moment de la force produite par un air comprimé à une tension *quelconque* $1+\mu$, si une fois la valeur de k a été *déterminée* conformément à la tension $1+\mu_1$.

Premier cas de $\mu > \mu_1$.

B. Dans ce cas il n'y a *aucun* changement à faire dans les calculs ci-dessus (§. 46. ***B*** — ***E***.), car on n'y a pas supposé que l'air comprimé dût se dilater précisément jusqu'à la tension 1. Donc on a dans ce cas, de même que (334),

$$352. \quad \overset{2}{M} = \pi \Delta^2 \sigma \left[(1+\mu) k \left(\text{log nat} \frac{\lambda}{k} + 1 \right) - \lambda \right].$$

C. Maintenant si k a été déterminé de sorte, que l'effet soit un maximum pour la tension $1+\mu_1$, savoir qu'on a fait

$$353. \quad k = \frac{\lambda}{1+\mu_1},$$

on obtient, en substituant (353) dans (352),

$$\overset{2}{M} = \pi \Delta^2 \sigma \left[(1+\mu) \frac{\lambda}{1+\mu_1} (\text{log nat}(1+\mu_1) + 1) - \lambda \right] \text{ ou bien}$$

$$354. \quad \overset{2}{M} = \frac{\pi \Delta^2 \lambda \sigma}{(1+\mu_1)} [(1+\mu) \text{ log nat}(1+\mu_1) + \mu - \mu_1].$$

D. La masse d'air atmosphérique consumée dans ce cas est suivant (335):

$$355. \quad a = \pi \Delta^2 (1+\mu) \frac{\lambda}{1+\mu_1},$$

donc $\overset{2}{M}$ (354) peut aussi être exprimé par

$$356. \quad \overset{2}{M} = \frac{a\sigma}{1+\mu} [(1+\mu) \text{ log nat}(1+\mu_1) + \mu - \mu_1].$$

E. Si, comme dans les locomotives à air de *première* sorte, on laisse entrer l'air, comprimé à la tension $1+\mu$, pendant *toute* la course du piston, on a suivant (349. 2.):

$$357. \qquad \overset{1}{M} = a\sigma\frac{\mu}{1+\mu},$$

en supposant que la *même* masse d'air atmosphérique a doive entrer dans le cylindre comme dans le cas (*D.*), de sorte que Δ et λ auront des valeurs différentes dans les deux cas.

De (356 et 357) on tire

$$358. \qquad \frac{\overset{2}{M}}{\overset{1}{M}} = \frac{1}{\mu}((1+\mu)\log\text{nat}(1+\mu_1)+\mu-\mu_1)$$
$$= \log(1+\mu_1)+1+\frac{\log(1+\mu_1)-\mu_1}{\mu}.$$

Voilà le *multiple* que le moment $\overset{2}{M}$ pour $k=\frac{\lambda}{1+\mu_1}$ est du moment $\overset{1}{M}$ pour $k=\lambda$.

F. Si par ex. on avoit adapté k à la valeur 5 de μ_1, on aurait

Pour $\mu =$	6	7	8	9	10
$359. \quad \frac{\overset{2}{M}}{\overset{1}{M}} =$	2,257	2,333	2,390	2,435	2,471.

On voit par là qu'il est *encore* avantageux de ne pas laisser entrer dans les cylindres l'air comprimé pendant *toute* la course des pistons, mais de lui en fermer l'entrée de manière que pour une tension $1+\mu_1$, inférieure à la sienne, le maximum de l'effet soit obtenu.

G. La *limite* de l'avantage à obtenir est suivant (358)

$$360. \qquad \frac{\overset{2}{M}}{\overset{1}{M}} = \log(1+\mu_1)+1 \quad \text{pour} \quad \mu_1=\infty.$$

Ce profit est donc d'autant moindre que μ_1 l'est. Pour $\mu_1=5$, comme ci-dessus, la limite est $=2{,}791$; pour $\mu_1=2$ elle est 1,693.

Second cas de $\mu<\mu_1$.

H. La formule (334) ne convient pas ici à *toute* la course λ du piston, mais seulement à une *partie* x de la course, telle, qu'à sa fin la tension de l'air ait diminuée jusqu'à 1, c'est-à-dire pour la partie

$$361. \qquad x=(1+\mu)k.$$

Donc il faut mettre dans (334) $(1+\mu)k$ à la place de λ. Cela donne

$$\overset{3}{M}_1 = \pi \Delta^2 \sigma[(1+\mu)k\,(\log\text{nat}(1+\mu)+1) - (1+\mu)k] \text{ ou bien}$$

362. $$\overset{3}{M}_1 = \pi \Delta^2 \sigma (1+\mu)k \log\text{nat}(1+\mu).$$

I. On ajoutera à ce moment celui qui se rapporte au ***reste*** $\lambda - (1+\mu)k$ de la course du piston, pendant lequel l'air aura une tension ***moindre*** que celle de l'atmosphère.

La force qui agit sur le piston est exprimée ici précisément comme (330), par

363. $$p = \tfrac{1}{4}\pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)\frac{k}{x} - 1\right],$$

donc on a aussi suivant (332)

364. $$\overset{3}{M}_2 = \tfrac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma[(1+\mu)k \log\text{nat}\, x - x] + \text{const.}$$

Mais ce moment est zéro, non pas pour $x = k$, comme dans (*D.*), mais pour $x = (1+\mu)k$, et il est complet pour $x = \lambda$. Donc Const. est ici

$$= \tfrac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma[(1+\mu)k - (1+\mu)k \log\text{nat}\,(1+\mu)k],$$

et on obtient

365. $$\overset{3}{M}_2 = \tfrac{1}{2}\pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)k \log\text{nat}\frac{\lambda}{(1+\mu)k} + (1+\mu)k - \lambda\right]$$

pour les deux cylindres.

K. Ce moment, ajouté à celui (362), donne

366. $$\overset{3}{M} = \overset{3}{M}_1 + \overset{3}{M}_2 = \pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)k \log\text{nat}\frac{\lambda}{k} + (1+\mu)k - \lambda\right]$$

$$= \pi \Delta^2 \sigma\left[(1+\mu)k\left(\log\text{nat}\frac{\lambda}{k} + 1\right) - \lambda\right],$$

et dans cette expression il y aura à substituer la valeur $\frac{\lambda}{1+\mu_1}$ que k doit avoir, si l'on veut que l'effet soit un maximum pour la tension $1+\mu_1$. Cette substitution donne

$$\overset{3}{M} = \pi \Delta^2 \sigma\left[\frac{1+\mu}{1+\mu_1}\lambda(\log\text{nat}(1+\mu_1)+1) - \lambda\right] \text{ ou bien}$$

367. $$\overset{3}{M} = \frac{\pi \Delta^2 \lambda \sigma}{1+\mu_1}[(1+\mu)\log\text{nat}(1+\mu_1) + \mu - \mu_1].$$

L. Cette expression est comme on le voit, précisément la même que celle (354) dans le ***premier cas*** $\mu > \mu_1$. Donc on a aussi dans le second cas, comme (358):

368. $$\frac{\overset{3}{M}}{\overset{1}{M}} = \frac{1}{\mu}[(1+\mu)\log\text{nat}(1+\mu_1) + \mu - \mu_1].$$

Cela donne dans l'exemple ci-dessus de $\mu_1 = 5$ (*F.*)

	Pour $\mu =$	4	3	2	1
369.	$\frac{\overset{3}{M}}{\overset{1}{M}} =$	1,989	1,722	1,187	−0,4166.

Donc la seconde sorte des locomotives à air est encore avantageuse. Mais pour $\mu = 1$ le piston n'est plus poussé par l'air dans le cylindre, car $\overset{3}{M}$ (369) est alors *négatif.*

M. L'expression du moment de la force de l'air comprimé étant parfaitement la même dans les deux cas, $\mu > \mu_1$ et $\mu < \mu_1$, on a indistinctement pour une valeur *quelconque* de μ:

$$370. \qquad M = \frac{\pi \Delta^2 \lambda \sigma}{1+\mu_1}[(1+\mu)\log\text{nat}(1+\mu_1)+\mu-\mu_1].$$

Voilà l'expression de l'effet que produit sur les manivelles pendant un tour des roues de propulsion la pression $1+\mu$ de l'air comprimé, introduit dans les cylindres pendant la *partie* $k = \frac{\lambda}{1+\mu_1}$ de la course des pistons. La masse d'air atmosphérique consumée pour cet effet est

$$371. \qquad a = \pi \Delta^2 \lambda . \frac{1+\mu}{1+\mu_1}.$$

Avant que d'appliquer ces formules à la traction des wagons, il faut encore voir ce qui arriverait, si l'air introduit dans les cylindres, au lieu d'être tiré des réservoirs d'air comprimé, l'était de l'atmosphère.

48.

A. Si l'air destiné à remplir la partie ***AC*** des cylindres (fig. 19), tiré de *l'atmosphère,* entre dans ***AC*** comme l'air comprimé, par les conduits 3 et 4, et en sort après en plein air, tout cela comme dans le cas décrit (§. 45. ***E.***), il n'y a pas d'autre différence du cas que nous venons de discuter toute à l'heure que celle que la valeur de la tension $1+\mu$ de l'air dans ***AC*** est maintenant $= 1$, ou que μ est $= 0$. Donc l'expression (370) donnera immédiatement le moment de la force de l'air en y fesant $\mu = 0$. Ce moment est donc pour le cas actuel:

$$372. \qquad M = \frac{\pi \Delta^2 \lambda \mu \sigma}{1+\mu_1}(\log\text{nat}(1+\mu_1)-\mu_1).$$

Ce moment est toujours *négatif,* $\log\text{nat}(1+\mu_1)$ étant toujours $< \mu_1$ pour toute valeur de $\mu_1 > 0$. Donc dans le cas actuel la locomotive n'exerce pas sur le train des wagons une force ***propulsive,*** mais une force ***répulsive,*** quelle que soit la valeur de $\mu_1 > 0$.

B. Si l'on fermait complétement à l'air l'entrée dans les cylindres, mais en laissant ouvert le tuyau de sortie X, alors suivant (§. 45. *II.*) aucune force d'air propulsive n'agirait sur le piston, tandis qu'en même temps la pression de l'atmosphère *s'opposerait* à son mouvement. Donc aussi ce cas ne diffère de celui (§. 47.) qu'en ce qu'on a ici $1+\mu=0$ et par conséquent $\mu=-1$. Cela étant substitué dans (370), donne

$$373. \quad M = \frac{\pi A^2 \lambda \sigma}{1+\mu_1}(-1-\mu_1) = -\pi A^2 \lambda \sigma;$$

la machine exerce donc également dans ce cas une force *répulsive* sur le train des wagons.

C. Si l'on fermait les deux tuyaux V et X suivant (§. 45. *I.*), *aucune* force n'agirait plus sur le piston, ni en le poussant, ni en le repoussant. Donc dans ce cas on a

$$374. \quad M = 0,$$

c'est-à-dire: la machine est absolument inactive.

D. Si enfin on laissait entrer l'air atmosphérique dans les cylindres par le tuyau V, et qu'on le conduisît, après avoir fait son service, par le tuyau X dans un *bassin fermé*, le cas serait semblable à celui (§. 41.). Mais la discussion de ce cas suivra mieux celle de l'effet de la machine sur la traction, au lieu de la précéder.

49.

A. La force nécessaire de traction d'un train du poids Q est

$$375. \quad Z = Q(n+\operatorname{tang}\beta) \text{ (103).}$$

Le train poussé par cette force parcourra, à chaque tour des roues de propulsion, la distance πD. Donc le *moment* de la force Z est pour chaque tour des roues:

$$376. \quad Z\pi D = Q\pi D(n+\operatorname{tang}\beta).$$

Ce moment doit être égal à celui M (370) de la force de la locomotive, donc on a:

$$Q\pi D(n+\operatorname{tang}\beta) = \frac{\pi A^2 \lambda \sigma}{1+\mu_1}[(1+\mu)\log\text{nat}(1+\mu_1)+\mu-\mu_1]$$

ou bien

$$377. \quad ZQ = QD(n+\operatorname{tang}\beta) = \frac{A^2 \lambda \sigma}{1+\mu_1}[(1+\mu)\log\text{nat}(1+\mu_1)+\mu-\mu_1].$$

B. Il s'agit maintenant de déterminer d'abord la valeur de μ_1, c'est-à-dire de la partie $k = \frac{\lambda}{1+\mu_1}$ (340) de la course λ du piston, à laquelle on veut fermer à l'air comprimé, l'entrée dans les cylindres pour obtenir le maximum de l'effet de la force de l'air, dans le cas où sa tension est $= 1+\mu_1$.

Il n'est nullement besoin de donner à $k = \frac{\lambda}{1+\mu_1}$ la valeur qui convient à la *plus grande* tension de l'air comprimé, nécessaire pour monter la *plus grande* pente de la voie; car le maximum de l'effet ne s'obtient toutefois que pour la *seule* tension $1+\mu_1$ de l'air; pour toute autre tension, plus faible, ou plus forte, le *maximum* n'a plus lieu. Il ne s'agit que de donner à l'air comprimé *dans les réservoirs* la tension nécessaire pour gravir la pente la plus raide, après que $1+\mu_1$ aura été préalablement déterminé. Si l'on voulait obtenir le maximum de l'effet *pour tout le trajet*, dont il s'agit effectivement, il faudrait déterminer $1+\mu_1$ de manière que la masse *totale* d'air nécessaire pour *tout le trajet*, calculée pour chaque cas particulier, suivant les différentes pentes de la voie, fût un maximum.

Donc on peut supposer ici μ_1 *déjà déterminé* suivant les circonstances particulières, et il n'y aura qu'à calculer l'expression de $1+\mu$ et de la masse d'air nécessaire pour les différentes pentes β, pour trouver par là la masse totale d'air nécessaire pour tout le trajet.

C. De (377) on tire

$$378. \quad 1+\mu = \frac{1+\mu_1}{\log \text{nat}(1+\mu_1)+1}\left[1+\frac{QD(n+\tang\beta)}{A^2\lambda\sigma}\right].$$

Si par ex. Q, comme ci-dessus, était $= 92770$ kilogr., $D = 1{,}57$ mèt., $A = 0{,}314$ mèt., $\lambda = 0{,}419$ mètres, et qu'on eût donné à μ_1 la valeur 5, comme dans (§. 47. *G.*), cela donnerait, dans le cas où la plus forte pente de la voie est $\tang\beta = 0{,}025$,

379. $1+\mu = 25{,}5$ atmosph. et

380. $1+\mu = 134$ atm., si la plus forte pente est $\tang\beta = 0{,}01$.

D. Il se présente deux moyens pour diminuer la tension de l'air nécessaire pour monter la plus forte pente. Ou l'on peut donner à μ_1 une valeur qui tient à cela; ou l'on peut donner aux cylindres de plus fortes dimensions A et λ, car aussi, par cela, la valeur de $1+\mu$, comme le fait voir la formule (378), diminue.

E. Quant au premier moyen, il s'agirait de la valeur de $1+\mu_1$, pour laquelle celle du facteur $\frac{1+\mu_1}{\log \text{nat}(1+\mu_1)+1}$ (378) serait un *minimum*. La première et la seconde différentiation de cette fraction donnent

$$381. \quad \frac{1}{\log(1+\mu_1)+1} - \frac{1}{[\log(1+\mu_1)+1]^2} = 0 \text{ et}$$

$$382. \quad -\frac{1}{(1+\mu_1)(\log(1+\mu_1)+1)^2} + \frac{1}{(1+\mu_1)(\log(1+\mu_1)+1)^3} = \frac{2-(\log(1+\mu_1)+1)}{(1+\mu_1)(\log(1+\mu_1)+1)^3}.$$

De (381) on tire $\log(1+\mu_1)+1-1=0$, $\log(1+\mu_1)=0$ et $\mu_1=0$, et cela substitué dans (382), donne $\frac{2-1}{1.1}=+1$. Cela étant une quantité essentiellement ***positive***, il s'en suit qu'un minimum existe effectivement. Donc on aurait $k=\frac{\lambda}{1+0}=\lambda$, c'est-à-dire: les locomotives de ***première*** sorte seraient les plus propres au but proposé, celui de diminuer autant que possible la tension de l'air comprimé, nécessaire pour monter la pente la plus raide. Mais si même on voulait sacrifier à ce but les autres avantages des locomotives de seconde sorte, la diminution de la tension de l'air obtenue, serait peu considérable. Car pour $\mu_1=0$ la formule (378) se réduit à

$$383. \qquad 1+\mu = 1+\frac{QD(n+\tang\beta)}{\Delta^2\lambda\sigma};$$

cela donne dans les exemples ci-dessus (***C.***)

$$384. \quad \begin{cases} 1. & 1+\mu = 12{,}87 \text{ atm. pour } \beta = 0{,}025 \text{ et} \\ 2. & 1+\mu = 4{,}2 \text{ atm. pour } \beta = 0{,}01; \end{cases}$$

et au moins la première de ces deux tensions est encore assez forte.

F. Donc le ***second*** des deux moyens (***D.***) est préférable. Si par ex. on n'augmentait que d'un ***quart*** les dimensions Δ et λ des cylindres, les valeurs de $1+\mu$ (379 et 380) se réduiraient déjà à

$$385. \quad \begin{cases} 1. & 1+\mu = 14{,}1 \text{ atm. pour } \beta = 0{,}025 \text{ et} \\ 2. & 1+\mu = 7{,}9 \text{ atm. pour } \beta = 0{,}01. \end{cases}$$

G. La masse d'air atmosphérique nécessaire pour ***un tour*** des roues de propulsion est, suivant (371 et 378)

$$386. \qquad a = \pi\Delta^2\lambda\frac{1+\mu}{1+\mu_1} = \pi\cdot\frac{QD(n+\tang\beta)+\Delta^2\lambda\sigma}{\sigma(\log\text{nat}(1+\mu_1)+1)},$$

et pour la longueur L de la voie, c'est-à-dire pour $\frac{L}{\pi D}$ tours des roues, elle est

$$387. \quad S = \frac{L}{\sigma D}\cdot\frac{QD(n+\tang\beta)+\Delta^2\lambda\sigma}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1} = \frac{L}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}\left[\frac{Q}{\sigma}(n+\tang\beta)+\frac{\Delta^2\lambda}{D}\right].$$

Cette expression de S rentre, comme cela doit être, précisément dans celle (162) pour les locomotives de ***première*** sorte, si l'on fait $\mu_1=0$; ce qui est le cas de cette dernière sorte de machines.

H. La formule (387) fait voir que, quelle que soit la valeur de $\tang\beta$, c'est-à-dire de la pente de la voie, la masse S d'air nécessaire est toujours d'autant moindre, que μ_1 est plus grand, c'est-à-dire k plus petit.

La ***plus grande*** valeur admissible de μ_1 est celle du μ qui convient à la ***plus forte*** pente de la voie, pente que nous désignerons par β_m. Cette

valeur de μ s'obtient de (378) ou (377) en y fesant $\mu = \mu_1$, et cela donne

$$388. \quad \log\text{nat}(1+\mu_1) = \frac{QD(n+\tang\beta_m)}{\Delta^2\lambda\sigma}.$$

Si à la place des logarithmes ***naturels,*** on veut écrire les logarithmes de ***Briggs,*** il faut multiplier à droite dans (388) par le nombre 0,4343, et cela donne

$$389. \quad \log\text{Brigg}(1+\mu_1) = 0{,}4343\,\frac{QD(n+\tang\beta_m)}{\Delta^2\lambda\sigma}.$$

Dans le premier des deux exemples (***C.***) cette formule donnerait $\log\text{Brigg}(1+\mu_1) = 5{,}1573$ et

$$390. \quad 1+\mu_1 = 143650 \text{ atm.}$$

Ce maximum est impraticable, même si la plus forte pente n'était que $\tang\beta = \frac{1}{300}$, comme sur le chemin de fer de Potsdam; on trouverait déjà

$$391. \quad 1+\mu_1 = 15{,}625 \text{ atm.}$$

I. Donc il ne reste qu'à donner à μ_1 une valeur ***convenable aux circonstances.*** On pourra déterminer $1+\mu_1$, de manière qu'après avoir donné aux cylindres les dimensions les plus fortes admissibles, la tension $1+\mu$, nécessaire pour gravir la pente ***la plus raide*** de la voie $\tang\beta_m$, tension que nous désignerons par $1+\mu_m$, ne soit par trop considérable. Pour cette détermination de μ_m la formule (378) donne

$$392. \quad \frac{1+\mu_1}{1+2{,}3026\log\text{Brigg}(1+\mu_1)} = \frac{(1+\mu_m)\Delta^2\lambda\sigma}{QD(n+\tang\beta_m)+\Delta^2\lambda\sigma} = \frac{1+\mu_1}{1+\log\text{nat}(1+\mu_1)},$$

$\log\text{nat}(1+\mu_1)$ étant $= 2{,}3026\log\text{Brigg}(1+\mu_1)$. De cette formule, $1+\mu_m$, Δ et λ ayant été déterminés, on tirera μ_1.

K. Mais si l'on veut commencer par la détermination arbitraire de $1+\mu_m$, pour fixer μ_1, il faut faire attention qu'une ***limite*** existe, laquelle doit être nécessairement ***surpassée*** par la valeur de μ_m. Car comme la ***plus petite*** valeur du facteur $\frac{1+\mu_1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}$ dans (378) est $= 1$, existante pour $\mu_1 = 0$, et que par conséquent la valeur de $1+\mu = 1+\mu_m$ (378) est plus grande pour toute autre valeur de $1+\mu_1$, la ***plus petite*** valeur de $1+\mu_m$ est suivant (378)

$$393. \quad 1+\mu_m = 1+\frac{QD(n+\tang\beta_m)}{\Delta^2\lambda\sigma},$$

et il ne faut pas donner une plus petite valeur à $1+\mu_m$ dans (392), si de cette formule on veut tirer la valeur de $1+\mu_1$.

Cependant, comme par la formule (392), μ_1 ne pourrait être trouvée qu'à l'aide de séries infinies, ou bien par des tâtonnements, il vaudra mieux dans la pratique ***supposer*** d'abord arbitrairement quelques valeurs de μ_1 et de

voir si la formule

394. $$1+\mu_m = \frac{1+\mu_1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}\cdot\left[1+\frac{QD(n+\text{tang}\,\beta_m)}{\Delta^2\lambda\sigma}\right] \text{ (378)},$$

suivant laquelle le calcul est facile, ne donne pas une valeur trop forte de μ_m.

L. En désignant par ${}^{\lambda}S$ la masse d'air atm. nécessaire aux locomotives à air de ***première*** sorte, et par ${}^{k}S$ celle nécessaire aux locomotives de ***seconde*** sorte, on a suivant (162 et 387)

395. $$ {}^{\lambda}S = L\left[\frac{Q}{\sigma}(n+\text{tang}\,\beta)+\frac{\Delta^2\lambda}{D}\right] \text{ et}$$

396. $$ {}^{k}S = \frac{L}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}\cdot\left[\frac{Q}{\sigma}(n+\text{tang}\,\beta)+\frac{\Delta^2\lambda}{D}\right],$$

donc

397. $$ {}^{k}S = \frac{{}^{\lambda}S}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1};$$

c'est-à-dire: il ne faut aux locomotives de la ***seconde*** sorte que la $(\log\text{nat}(1+\mu_1)+1)^{\text{ième}}$ ***partie*** de la masse d'air atmosphérique nécessaire aux locomotives de la ***première.***

On a

398.

Pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log\text{nat}(1+\mu_1)+1 =$	1	1,693	2,097	2,386	2,609	2,792	2,946	3,079	3,197	3,302	3,398,
$\frac{1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1} =$	1	0,5907	0,4768	0,4191	0,3833	0,3581	0,3394	0,3248	0,3128	0,3028	0,2943.

On voit par là combien est considérable l'économie de force que présentent les locomotives à air de ***seconde*** sorte. Cette économie est de ***40 jusqu'à 70 pour cent*** de la force nécessaire pour la compression de l'air exigée pour les locomotives de première sorte.

50.

A. Si une locomotive à air de ***première*** sorte n'a à exercer aucune force sur le train des wagons, ce qui a lieu en descendant des pentes de $\text{tang}\,\beta = n = 0{,}004$, on peut faire puiser aux cylindres leur air de l'atmosphère, au lieu du réservoir d'air comprimé, et laisser sortir cet air, non pas dans un condenseur, mais dans l'atmosphère. Alors la machine n'exerce ni force propulsive, ni force répulsive. Le train et la locomotive descendent alors librement la pente, poussés seulement par la gravité.

B. Mais cela n'a pas lieu sans restriction sur la *même* pente de $\text{tang}\,\beta = 0{,}004$, quand une locomotive de ***seconde*** sorte se trouve à la tête du train. Cela n'aurait lieu que si suivant (§. 45. ***I.***), on fermait les deux

tuyaux V et X (fig. 19) au moment où le train est arrivé au sommet de la pente $\text{tang}\,\beta = -n$; ce qui présenterait des difficultés dans la pratique.

Ordinairement ce ne sera que le tube V que le conducteur des wagons pourra fermer ou mettre en communication avec l'air atmosphérique, au moyen du robinet de ce tuyau qu'il a sous la main; le tube X de sortie de l'air restera ordinairement ouvert.

C. Dans l'un et dans l'autre cas, la machine exercera inévitablement une force *répulsive* sur le train, dont le moment pour un tour de la manivelle est suivant (372 et 373)

399. $M = \frac{\pi \Delta^2 \lambda \mu \sigma}{1+\mu_1}(\log\text{nat}(1+\mu_1) - \mu_1)$, si V et X sont ouverts tous les deux, et

400. $M = -\pi \Delta^2 \lambda \sigma$, si V est fermé et X ouvert.

Or comme le moment de la force de la locomotive doit être toujours égal à celui de la résistance du train (376), on obtient

401. $Q\pi D(n + \text{tang}\,\beta) = \frac{\pi \Delta^2 \lambda \sigma}{1+\mu_1}(\log\text{nat}(1+\mu_1) - \mu_1)$ dans le cas (399) et

402. $Q\pi D(n + \text{tang}\,\beta) = -\pi \Delta^2 \lambda \sigma$ dans le cas (400).

De là on tire

403. $\text{tang}\,\beta = \frac{\Delta^2 \lambda \sigma}{(1+\mu_1) QD}[\log\text{nat}(1+\mu_1) - \mu_1] - n$, si V et X sont ouverts tous les deux, et

404. $\text{tang}\,\beta = -\frac{\Delta^2 \lambda \sigma}{QD} - n$, si V est fermé et X ouvert.

Donc, quand une locomotive de *seconde* sorte est à la tête d'un train, celui-ci ne descend pas encore librement la pente $\text{tang}\,\beta = -n$: il faut que cette pente soit *plus forte* et qu'elle ait les valeurs (403 et 404). Les locomotives de *seconde* sorte tirent par conséquent encore de l'air *comprimé* du réservoir sur les pentes $\text{tang}\,\beta = -n$, là où les machines de *première* sorte n'en ont plus besoin.

Dans l'exemple ci-dessus de $Q = 92770$ kilogr. et $D = 1{,}57$ mèt. on a

405. $\begin{cases} 1. & \frac{\Delta^2 \lambda \sigma}{QD} = 0{,}000112 \text{ pour } \Delta = 0{,}23 \text{ et } \lambda = 0{,}31 \text{ mèt. et} \\ 2. & \frac{\Delta^2 \lambda \sigma}{QD} = 0{,}000264 \text{ pour } \Delta = 0{,}31 \text{ et } \lambda = 0{,}41 \text{ mèt.} \end{cases}$

Cela étant substitué dans (403 et 404) donne, par ex. pour $\mu_1 = 5$:

406. $\begin{cases} 1. & \text{tang}\,\beta = 0{,}004613 \text{ pour } \Delta = 0{,}23 \text{ et } \lambda = 0{,}31 \text{ m.} \\ 2. & \text{tang}\,\beta = 0{,}00543 \text{ pour } \Delta = 0{,}31 \text{ et } \lambda = 0{,}41 \text{ m.} \end{cases}$, si V et X sont ouverts tous les deux,

407. $\begin{cases} 1. & \text{tang}\,\beta = 0{,}00511 \text{ pour } \Delta = 0{,}23 \text{ et } \lambda = 0{,}31 \text{ m.} \\ 2. & \text{tang}\,\beta = 0{,}00666 \text{ pour } \Delta = 0{,}31 \text{ et } \lambda = 0{,}41 \text{ m.} \end{cases}$, si V est fermé et X ouvert.

Premièrement, sur ces pentes, on pourra fermer à l'air comprimé l'entrée dans les cylindres. Sur toute pente ***plus faible***, la machine en a encore besoin. Si déjà sur la pente $\text{tang}\beta = 0{,}004$, on voulait économiser de l'air comprimé, il faudrait que les ***deux*** tuyaux pussent être fermés.

C'est donc un désavantage des locomotives de ***seconde*** sorte, de consommer encore de l'air ***comprimé***, là où celles de ***première*** sorte n'en ont plus besoin. Mais la différence des pentes pour les deux espèces de machines n'est pas considérable, et en revanche, les locomotives de ***seconde*** sorte ont l'avantage de pouvoir modérer au besoin la vitesse du train déjà sur les pentes qui surpassent un peu $\text{tang}\beta = 0{,}004$; même encore sur une pente de $\text{tang}\beta = 0{,}00666 = \frac{1}{150}$, comme le fait voir (407. 2.).

51.

En descendant des pentes ***plus fortes que (403 et 404)***, une locomotive à air de ***seconde*** sorte peut puiser de l'air de l'atmosphère, comme une locomotive de ***première*** sorte, et le comprimer dans un bassin ***B***. Mais ce ne sont pas 4 cylindres d'air atmosphérique qu'elle introduit à chaque tour de la manivelle dans le bassin ***B***, comme le font les locomotives de ***première*** sorte: c'est seulement une masse d'air qui remplirait 4 fois l'espace AC (fig. 19), c'est-à-dire $4 \cdot \frac{1}{4}\pi \Delta^2 k = \frac{\pi \Delta^2 \lambda}{1+\mu_1}$ (340) mèt. cub. Donc la masse d'air atm. introduite dans le bassin ***B*** par la machine, est sur la longueur ***L*** de la voie, longueur qui demande $\frac{L}{\pi D}$ tours de la manivelle:

$$408. \qquad S_3 = -L\frac{\Delta^2 \lambda}{(1+\mu_1)D} \text{ mèt. cub.}$$

Cette expression se réduit pour $\mu_1 = 0$, comme cela doit être, à celle (171) qui convient aux machines de première sorte.

52.

Quant à la masse d'air nécessaire aux locomotives à air de seconde sorte pour ***engendrer*** la vitesse c au moment du départ du train, on l'obtiendra par un calcul tout analogue à celui qui en donnait la valeur pour les machines de première sorte.

A. Les calculs (§. 36) sont ici absolument les mêmes jusqu'en (§. 36. ***R.***). Les résultats de (§. 36. ***A — Q.***) conviennent aussi au cas actuel, comme on en a fait la remarque en (§. 36. ***H.***); car il est indifférent que la force p qui agit sur les pistons soit ***variable,*** comme ici, ou qu'elle soit ***constante,*** comme là.

Donc on a ici, comme dans (202),

$$409. \quad \frac{c^2}{4g} = H_2 = \frac{2LD}{\pi\lambda^2 Q}(X_2 - X_0 - \tfrac{1}{2}\pi ZD),$$

X_0 et X_2 désignant les valeurs de l'intégrale de $p\,\partial x$ pour $x = 0$ et pour $x = 2r = \lambda$.

B. La différence du cas actuel avec celui ci-dessus, est seulement qu'en (§. 36) on a suivant (205) $X_2 - X_0 = \frac{1}{2}\pi\Delta^2\lambda\mu\sigma$, et ici suivant (334),

$$410. \quad X_2 - X_0 = \tfrac{1}{2}M = \tfrac{1}{2}\pi\Delta^2\sigma\left[(1+\mu)k\left(\text{log nat}\,\frac{\lambda}{k}+1\right)-\lambda\right].$$

Donc au lieu de (206. §. 36) on obtient ici

$$411. \quad \frac{c^2}{4g} = H_2 = \frac{LD}{\lambda^2 Q}\left[\Delta^2\sigma\left((1+\mu)k\left(\text{log nat}\,\frac{\lambda}{k}+1\right)-\lambda\right)-ZD\right].$$

C. La machine consomme ici $\pi(1+\mu)\Delta^2 k$ mèt. cub. d'air atm. à chaque tour des roues propulsives, et par conséquent sur la distance L, ou sur $m = \frac{L}{\pi D}$ tours:

$$412. \quad S_4 = \frac{L}{\pi D}(1+\mu)\pi\Delta^2 k = \frac{L\Delta^2 k}{D}(1+\mu) \text{ mèt. cub.}$$

D. De (411) on tire

$$413. \quad L = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\lambda^2 Q}{D\left[\Delta^2\sigma\left((1+\mu)k\left(\text{log nat}\,\frac{\lambda}{k}+1\right)-\lambda\right)-ZD\right]}.$$

Cela substitué dans (412), on obtient

$$414. \quad S_4 = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\lambda^2\Delta^2 Qk(1+\mu)}{D^2\left[\left((1+\mu)k\left(\text{log nat}\,\frac{\lambda}{k}+1\right)-\lambda\right)\Delta^2\sigma - ZD\right]}.$$

Dans cette formule, Z désigne la force de traction qui est nécessaire à l'endroit où la vitesse c doit être produite, et μ est la tension de l'air comprimé *dans le réservoir*, et par conséquent celle μ_m nécessaire pour gravir la plus forte pente de la voie. La formule (414) se réduit, comme il le faut, à celle (207), si l'on fait $k = \lambda$.

E. Si k a été déterminé de manière que l'effet de la machine soit un *maximum* pour la tension μ_1 de l'air comprimé, on a suivant (340 ou 353)

$$415. \quad k = \frac{\lambda}{1+\mu_1}.$$

Cela étant substitué dans (414), donne

$$416. \quad S_4 = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\lambda^3\Delta^2 Q\,\frac{1+\mu_m}{1+\mu_1}}{D^2\left[\left(\frac{1+\mu_m}{1+\mu_1}(\text{log nat}\,(1+\mu_1)+1)-\lambda\right)\Delta^2\sigma - ZD\right]}.$$

Or suivant (392) on a

$$417. \quad \frac{1+\mu_m}{1+\mu_1} = \frac{QD(n+\operatorname{tang}\beta_m)+\Delta^2\lambda\sigma}{\Delta^2\lambda\sigma(\log\operatorname{nat}(1+\mu_1)+1)},$$

donc (416) donne

$$S_4 = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\lambda^3\Delta^2 Q\dfrac{QD(\operatorname{tang}\beta_m)+\Delta^2\lambda\sigma}{\Delta^2\lambda\sigma(\log\operatorname{nat}(1+\mu_1)+1)}}{D^2[QD(n+\operatorname{tang}\beta_m)+\Delta^2\lambda\sigma-\Delta^2\lambda\sigma-ZD]} \text{ ou bien}$$

$$418. \quad S_4 = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{Q\lambda^2(QD(n+\operatorname{tang}\beta_m)+\Delta^2\lambda\sigma)}{D^3\sigma(Q(n+\operatorname{tang}\beta_m)-Z(\log\operatorname{nat}(1+\mu_1)+1))}.$$

Désignant par β_2 la pente de la voie à l'endroit où la vitesse c doit être engendrée, on a

$$419. \quad Z = Q(n+\operatorname{tang}\beta_2) \text{ (103)},$$

et (418) donne alors

$$420. \quad S_4 = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{\lambda^2(QD(n+\operatorname{tang}\beta_m)+\Delta^2\lambda\sigma)}{D^3\sigma(\operatorname{tang}\beta_m-\operatorname{tang}\beta_2)(\log\operatorname{nat}(1+\mu_1)+1)}.$$

Cette formule, en y fesant $\mu_1 = 0$ ou $k = \lambda$, se réduit, comme il le faut, à celle (215), et on voit que la valeur de S_4, pour les locomotives à air de *seconde* sorte, n'est que la $(\log(1+\mu_1)+1)^{\text{ième}}$ partie de celle pour les machines de *première* sorte: donc aussi sur ce point les locomotives de *seconde* sorte sont préférables au machines de première sorte.

c. Effets de la tension de l'air comprimé par les locomotives à air, en descendant de fortes pentes, sur la modération de la vitesse du train.

53.

A. Les calculs de ces effets sont les mêmes que ceux qui conviennent aux locomotives à air de *première* sorte, avec la seule différence, que ce ne sont pas ici quatre cylindres d'air atmosphérique que la machine introduit dans le condenseur B à chaque tour des roues de propulsion, mais suivant (45. *F.*) seulement la masse d'air $\pi\Delta^2 k$ qui remplit quatre fois l'espace AC (fig. 19). Donc après m tours des roues, et quand l'un des deux pistons pendant le $(m+1)^{\text{ième}}$ tour a parcouru encore la distance u_1, l'autre la distance u_2 (269 et 270), ce ne sont pas, comme (274), $(1+\nu)B+\frac{1}{4}\pi\Delta^2(4ma+u_1+u_2)$, mais seulement

$$421. \quad (1+\nu)B+\tfrac{1}{4}\pi\Delta^2\left(4mk+(u_1+u_2)\frac{k}{\lambda}\right)$$

mètres cub. d'air atmosphérique que la machine a introduit dans le condenseur; l'air atmosphérique qui est entré dans l'espace AC s'y est dilaté jusqu'à l'espace AD et sa densité n'est plus par conséquent que $\frac{k}{\lambda}$.

B. La tension de l'air (421) dans le condenseur est ici

$$\frac{(1+\nu)B+\frac{1}{4}\pi\Delta^2\left(4mk+(u_1+u_2)\frac{k}{\lambda}\right)}{B}=1+\nu+\frac{\pi\Delta^2 k}{4\lambda B}(4m\lambda+u_1+u_2).$$

La tension 1 de l'air atm. s'y oppose: donc la pression effective p sur l'aire $\frac{1}{2}\pi\Delta^2$ des deux pistons est ici

$$422.\qquad p=\frac{\pi^2\Delta^4\sigma}{8B}\cdot\frac{k}{\lambda}(4m\lambda+u_1+u_2)+\tfrac{1}{2}\nu\pi\Delta^2\sigma.$$

Cette valeur de p prend la place de celle (275) qui a lieu pour les locomotives de première sorte.

C. D'ailleurs on a ici, comme dans (267),

$$423.\qquad -2(X_2-X_0)-\pi ZD=\frac{Q}{4g}(v_1^2-v_0^2),$$

où X est l'intégrale de $p\partial x$.

Donc on parviendra immédiatement aux résultats demandés, en multipliant par (299) les différents termes de cette expression, (excepté Z et $\frac{1}{2}\nu\pi\Delta^2\sigma$) par $\frac{k}{\lambda}$, dont la valeur suivant (340) est

$$424.\qquad \frac{k}{\lambda}=\frac{1}{1+\mu_1}.$$

D. Cela donne

$$425.\qquad \frac{Q}{4g}(v_0^2-v_m^2)=L\left[\Delta^4\sigma\frac{2(L-\pi D)\lambda^2+c\pi D}{4(1+\mu_1)BD^2}+Z+\frac{\nu\Delta^2\lambda\sigma}{2D}\right].$$

Au lieu de la formule (303) on obtient ici

$$426.\qquad \frac{Q}{4g}(v_0^2-v_m^2)=L\left[Z+\frac{\Delta^4\lambda^2\sigma L}{2(1+\mu_1)BD^2}+\frac{\nu\Delta^2\lambda\sigma}{2D}\right],$$

et au lieu de (307 et 308)

$$427.\qquad (1+\mu_1)QBD^2(v_0^2-v_m^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta))$$
$$=2L\Delta^4\sigma g[(L-\pi D)\lambda^2+\tfrac{1}{2}c\pi D-2(1+\mu_1)BD\nu\Delta^2\lambda\sigma],$$

$$428.\qquad (1+\mu_1)QBD^2(v_0^2-v_m^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta))$$
$$=2gL\Delta^2\lambda\sigma[L\Delta^2\lambda+(1+\mu_1)\nu BD].$$

Au lieu de (309) on obtient

$$429.\qquad v_m^2=v_0^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta)-\frac{2gL\Delta^2\lambda(L\Delta^2\lambda+(1+\mu_1)\nu BD)}{(1+\mu_1)D^2BQ}$$

et au lieu de (310. 311. 312.)

$$430.\qquad B=\frac{2gL^2\Delta^4\lambda^2\sigma}{(1+\mu_1)D[DQ(v_0^2-v_m^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta)-2gL\Delta^2\lambda\nu\sigma]},$$

$$431.\qquad B=-\frac{L\Delta^4\lambda^2\sigma}{(1+\mu_1)D[2DQ(n+\operatorname{tang}\beta)+\Delta^2\lambda\nu\sigma]}\quad\text{pour}\quad v_m=v_0,$$

$$432.\qquad B=\frac{2gL^2\Delta^4\lambda^2\sigma}{(1+\mu_1)D[DQ(v_0^2-4gL(n+\operatorname{tang}\beta))-2gL\Delta^2\lambda\nu\sigma]}\quad\text{pour}\quad v_m=0.$$

Enfin, au lieu de (313, 314 et 315) on obtient

433. $$L = -\frac{(1+\mu_1)BD}{\Delta^4\lambda^2\sigma}\Big[QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\nu\sigma \pm\sqrt{\Big((QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\lambda\nu\sigma)^2+(v_0^2-v_m^2)\frac{Q\Delta^4\lambda^2\sigma}{2g(1+\mu_1)B}\Big)}\Big],$$

434. $$L = -\frac{2(1+\mu_1)BD}{\Delta^4\lambda^2\sigma}(QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{4}\Delta^2\nu\sigma) \text{ pour } v_m = v_0,$$

435. $$L = -\frac{(1+\mu_1)BD}{\Delta^4\lambda^2\sigma}\Big[QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\nu\sigma \pm\sqrt{\Big((QD(n+\operatorname{tang}\beta)+\tfrac{1}{2}\Delta^2\lambda\nu\sigma)^2+v_0^2\cdot\frac{Q\Delta^4\lambda^2\sigma}{2g(1+\mu_1)B}\Big)}\Big] \text{ pour } v_m = 0.$$

E. La tension effective s à laquelle l'air est comprimé dans le condenseur B, après m tours des roues de propulsion, est ici suivant (***A.*** et ***B.***):

436. $$s = \frac{m\pi\Delta^2 k}{B}+\nu = \frac{L}{\pi D}\cdot\frac{\pi\Delta^2\lambda}{(1+\mu_1)B}+\nu \text{ (298 et 340)} = \frac{L\Delta^2\lambda}{(1+\mu_1)DB}+\nu,$$

et en substituant dans cette expression celle de B (430, 431 et 432), on obtient des expressions de s analogues à celles (317, 318 et 319).

d. Résumé des résultats obtenus jusqu'ici pour la seconde sorte des locomotives à air.

54.

A. La machine consommera de l'air comprimé tiré du grand réservoir sur toutes les pentes de la voie ***qui ne sont pas moindres*** que

437. $\operatorname{tang}\beta = \frac{\Delta^2\lambda\sigma}{(1+\mu_1)QD}[\log\text{nat}(1+\mu_1)-\mu_1]-n$, si les tuyaux V et X (fig. 19) sont ouverts tous les deux (403) et

438. $\operatorname{tang}\beta = -\frac{\Delta^2\lambda\sigma}{QD}-n$, si V est fermé et X ouvert (404).

La consommation d'air pour la longueur L de la voie est

439. $$S_1 = \frac{L}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}\Big[\frac{Q}{\sigma}(n+\operatorname{tang}\beta)+\frac{\Delta^2\lambda}{D}\Big] \text{ mèt. cub. d'air atm. (387).}$$

c'est-à-dire, suivant (387),

440.
$$\frac{1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1} = \begin{array}{cccccccccccc} 100 & 59{,}07 & 47{,}68 & 41{,}91 & 38{,}33 & 35{,}81 & 33{,}94 & 32{,}48 & 31{,}28 & 30{,}28 & 29{,}43 & \text{pour cent} \\ \text{pour } \mu = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

de celle d'une locomotive de ***première*** sorte.

B. Le train des wagons et la locomotive de seconde sorte descendent librement les pentes (437 et 438), poussés seulement par la gravité. On choisira naturellement, pour cela, la ***plus faible*** des deux pentes, et c'est celle (437),

parceque $\log\text{nat}(1+\mu_1)-\mu_1$ est moindre que 1 pour toute valeur de $\mu_1 > 0$. Donc aussitôt qu'une telle pente se présentera, on ouvrira les deux tuyaux V et X, et alors la consommation d'air comprimé sur cette pente sera

$$441. \quad S_2 = 0.$$

C. Si les pentes sont plus fortes que (437 et 438), la machine, en les descendant, introduira dans le condenseur sur la longueur L de la course suivant (408)

$$442. \quad S_3 = -L \cdot \frac{\Delta^2 \lambda}{(1+\mu_1) D} \text{ mèt. cub. d'air atm.}$$

D. Il faut à une locomotive à air de ***seconde*** sorte suivant (420)

$$443. \quad S_4 = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\lambda^2 (QD(n+\operatorname{tang}\beta_m)+\Delta^2 \lambda \sigma)}{D^3 \sigma (\operatorname{tang}\beta_m - \operatorname{tang}\beta_2)(\log\text{nat}(1+\mu_1)+1)} \text{ mèt. cub. d'air atm.}$$

pour ***engendrer*** la vitesse c au commencement du trajet et sur la pente β_2, si l'on y emploie la tension de l'air comprimé nécessaire pour gravir la plus forte pente β_m de la voie. Cette consommation d'air est $\frac{1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}$ (439) fois celle dont aurait besoin une locomotive à air de ***première*** sorte dans les mêmes circonstances.

E. Les formules (425 — 436) expriment les effets du condenseur B sur la modération de la vitesse du train.

F. La valeur de μ_1, qui donne la valeur la plus avantageuse de

$$444. \quad k = \frac{\lambda}{1+\mu_1} \text{ (340)},$$

pourra être calculée le plus facilement par la formule

$$445. \quad 1+\mu_m = \frac{1+\mu_1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1} \cdot \left[1 + \frac{QD(n+\operatorname{tang}\beta_m)}{\Delta^2 \lambda \sigma}\right] \text{ (394)},$$

en y donnant à μ_1 une valeur telle, que celle de la tension $1+\mu_m$ nécessaire pour monter la plus forte pente β_m de la voie, ne soit pas trop forte. Le premier facteur à droite dans (445) est

$$446. \quad \frac{1+\mu_1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}$$

$=$	1	1,1814	1,4304	1,6764	1,9165	2,1486	2,3758	2,5984	2,8152	3,0280	3,2373
pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

G. Comme la valeur de S_1 (440), aussi bien que celle de S_4 (443), est l'une et l'autre $\frac{1}{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}$ fois celle de la masse d'air atm. que consomment les locomotives à air de *première* sorte, on obtiendra immédiatement

l'expression de la consommation d'air des locomotives de *seconde* sorte par celle de la consommation des locomotives de *première* sorte, si on multiplie la dernière par $\frac{1}{\log \text{nat}\,(1+\mu_1)+1}$; mais seulement *dans le cas,* où la voie n'a pas des pentes plus fortes que celles exprimées par (437 et 438).

Le chemin de fer de Berlin à Potsdam, pris pour exemple dans (§. 37. *D.*), se trouve dans ce cas; donc il n'y a qu'à multiplier par $\frac{1}{\log \text{nat}\,(1+\mu_1)+1}$ la consommation d'air calculée ci-dessus, pour obtenir celle des locomotives à air de *seconde* sorte sur cette voie.

Pour obtenir ici la valeur du *multiplicateur,* il s'agit d'abord de déterminer convenablement μ_1.

a. Nous avons supposé ci-dessus

447. $Q = 92770$ kilogr., $\Delta = 0{,}235$ mèt., $\lambda = 0{,}314$ mèt. et $D = 1{,}57$ mèt. La plus forte pente de la route est $\text{tang}\,\beta_m = 0{,}00333\ldots$. Cela substitué dans (445) donne

$$448. \quad 1 + \frac{QD(n + \text{tang}\,\beta_m)}{\Delta^2 \lambda \sigma} = 7{,}518,$$

donc on obtient en vertu de (445 et 446),

449.

Pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	
$1+\mu_m =$	7,518	8,878	10,753	12,600	14,404	et
$\mu_m =$	6,518	7,878	9,753	11,600	13,404.	

Donc si l'on veut donner à l'air comprimé dans le grand réservoir une tension effective d'environ 10 atm., on pourra poser

450. $\mu_1 = 2$ et par conséquent $k = \frac{\lambda}{1+\mu_1} = 0{,}105$ mèt.

Cette valeur de μ_1 donne en vertu de (439), $\frac{1}{\log \text{nat}\,(1+\mu_1)+1} = 0{,}4768$, et la consommation d'air calculée en (§. 37. *D.*) est à multiplier par cette fraction. Donc la consommation d'une locomotive à air de *seconde* sorte, n'est pas ici encore la *moitié* de celle d'une locomotive de *première* sorte (222). Elle n'est que

451.
1. 648 mèt. cub. d'air atm. pour le trajet de Berlin à Potsdam et
2. 627 – – – – – – – de Potsdam à Berlin.

On voit par cet exemple combien les locomotives à air de la seconde sorte sont préférables à celles de la première.

b. La diminution de la consommation d'air est un peu moindre, si l'on donne aux cylindres des dimensions plus fortes.

Si par ex. on suppose

$$452. \quad \Delta = 0{,}314 \text{ et } \lambda = 0{,}418 \text{ mèt.},$$

on a dans (445)

$$453. \quad 1 + \frac{QD(n + \operatorname{tang}\beta_m)}{\Delta^2 \lambda \sigma} = 3{,}75,$$

et cela donne en vertu de (445 et 446)

$$454. \quad \begin{cases} \text{Pour } \mu_1 = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 + \mu_m = & 3{,}75 & 4{,}424 & 5{,}364 & 6{,}286 & 7{,}187 & 8{,}057 & 8{,}909 \text{ et} \\ \mu_m = & 2{,}75 & 3{,}424 & 4{,}364 & 5{,}286 & 6{,}187 & 7{,}057 & 7{,}909. \end{cases}$$

Si maintenant on veut faire

$$455. \quad \mu_1 = 3, \text{ on a } k = \frac{\lambda}{1 + \mu_1} = 0{,}105,$$

et il n'y a qu'à comprimer l'air dans le réservoir à une tension effective de 5,286 atm. La consommation d'air est alors suivant (439) 0,4191 fois celle d'une locomotive à air de première sorte, et comme cette dernière, à cause des plus fortes dimensions de Δ et λ, est alors respectivement 1770 et 1727 mèt. cub., elle est

$$456. \quad \begin{cases} 1. & 742 \text{ mèt. cub. d'air pour le trajet de Berlin à Potsdam et} \\ 2. & 723 \text{ - - - - - - de Potsdam à Berlin.} \end{cases}$$

c. Des pentes les plus avantageuses pour les locomotives à air de seconde sorte.

55.

A. Tout ce qui a été dit (§. 38) sur ce sujet, est également applicable aux locomotives à air de seconde sorte. La seule différence est, qu'ici la pente β, où la gravité seule fait descendre le train des wagons, et où aucune consommation d'air *comprimé* n'est plus nécessaire, n'est pas $= -n$, mais celle qu'expriment les formules (437 et 438), pente que nous désignerons par β_0.

B. En conservant les notations (227 et 228), et en mettant en sus, pour abréger,

$$457. \quad \frac{1}{\log \text{nat}(1 + \mu_1) + 1} = \delta \text{ et}$$

$$458. \quad \mu_1 - \log \text{nat}(1 + \mu_1) = \tau,$$

nous aurons en vertu de (§. 54):

459. $\operatorname{tang}\beta_0 = -\frac{\eta\tau}{k_1(1+\mu_1)} - n$ (437) pour le cas où les tuyaux ***V*** et ***X*** sont ouverts tous les deux, et

460. $\operatorname{tang}\beta_1 = -\frac{\eta}{k_1} - n$ (438) pour le cas où ***V*** est fermé et ***X*** ouvert,

461. $S_1 = L\delta[k_1(n+\text{tang}\,\beta)+\eta]$ (440) pour $\beta > \beta_0$,

462. $S_2 = 0$ . . . . . (441) pour $\beta = \beta_0$,

463. $S_3 = -\frac{L\eta}{1+\mu_1}$ . . . . . (442) pour $\beta < \beta_0$.

Conformément à ces formules, on pourra faire le calcul comme dans (§. 39 et 40). Comme ci-dessus on écrira pour abréger seulement β au lieu de tangβ.

56.

Pour économiser la place, nous ne discuterons que le cas (§. 39) où la hauteur h est à gravir avec une pente ***constante***, en laissant au lecteur l'étude de la seconde question des ***deux pentes différentes*** les plus avantageuses pour le même but.

A. Les formules (232) sont remplacées ici par les suivantes:

464.
1. $A = L\delta(\eta+nk_1)$ (461) et $B = L\delta(\eta+nk_2)$ (461) pour $\beta = 0$,
2. $A = L\delta(\eta+(n+\beta)k_1)$ (461) et $B = L\delta(\eta+(n-\beta)k_2)$ (461) pour $\beta < \beta_0$,
3. $A = L\delta(\eta+(n+\beta_0)k_1)$ (461) et $B = 0$ (462) . . . . pour $\beta = \beta_0$ et
4. $A = L\delta(\eta+(n+\beta)k_1)$ (461) et $B = -\frac{L\eta}{1+\mu_1}$ (463) . . pour $\beta > \beta_0$.

Cela donne, $A+B$ étant $= C$ (229),

465.
1. $C = L\delta\,(\eta+n(k_1+k_2))$ . . . . pour $\beta = 0$,
2. $C = L\delta\,(2\eta+n(k_1+k_2)+\beta(k_1-k_2))$ pour $\beta < \beta_0$,
3. $C = L\delta\,(\eta+(n+\beta_0)k_1)$ . . . . pour $\beta = \beta_0$ et
4. $C = L\delta\left(\eta\left(1-\frac{1}{(1+\mu_1)\delta}\right)+(n+\beta)k_1\right)$ pour $\beta > \beta_0$.

B. Les valeurs de β_0 doivent être prises ici ***positivement***, de sorte que

466.
1. $n+\beta_0 = 2n+\frac{\eta\tau}{k_1(1+\mu_1)}$ (459) et
2. $n+\beta_0 = 2n+\frac{\eta}{k_1}$ (460).

La première de ces expressions donne dans (465. 3.)

467. $\eta+(n+\beta_0)k_1 = \eta+2nk_1+\frac{\eta\tau}{1+\mu_1} = \eta\left(1+\frac{\tau}{1+\mu_1}\right)+2nk_1$;

la seconde donne

468. $\eta+(n+\beta_0)k_1 = \eta+2nk_1+\eta = 2(\eta+nk_1)$.

Pour (465. 4.) on a

469. $1-\frac{1}{(1+\mu_1)\delta} = 1-\frac{\log\text{nat}(1+\mu_1)+1}{1+\mu_1} = \frac{\tau}{1+\mu_1}$ (458).

Tout cela substitué dans (465) donne

$$470.\begin{cases} 1.\ C=L\delta(2\eta+n(k_1+k_2)) \ldots\ldots \text{ pour } \beta=0, \\ 2.\ C=L\delta(2\eta+n(k_1+k_2)+\beta(k_1-k_2)) \text{ pour } \beta<\beta_0, \\ 3.\begin{cases} C=L\delta\left(\eta\left(1+\frac{\tau}{1+\mu_1}\right)+2nk_1\right) \ldots \text{ pour } \beta=\beta_0, \text{ dans les cas où les tuyaux } V \text{ et } X \text{ sont ouverts tous les deux,} \\ C=2L\delta(\eta+nk_1) \ldots\ldots\ldots \text{ pour } \beta=\beta_0, \text{ si } V \text{ est fermé et } X \text{ ouvert,} \end{cases} \\ 4.\ C=L\delta\left(\frac{\eta\tau}{1+\mu_1}+(n+\beta)k_1\right) \ldots \text{ pour } \beta>\beta_0. \end{cases}$$

C. Si en ***premier*** lieu la charge des wagons est la même dans les deux directions du trajet, c'est-à-dire si $k_2=k_1$, les formules (470) donnent

$$471.\begin{cases} 1.\ C=2L\delta(\eta+nk_1) \ldots\ldots\ldots \text{ pour } \beta=0, \\ 2.\ C=2L\delta(\eta+nk_1) \ldots\ldots\ldots \text{ pour } \beta<\beta, \\ 3.\begin{cases} C=L\delta\left(\eta\left(1+\frac{\tau}{1+\mu_1}\right)+2nk_1\right) \text{ pour } \beta=\beta_0 \text{ et les deux tuyaux étant ouverts tous deux,} \\ C=2L\delta(\eta+nk_1) \ldots\ldots\ldots \text{ pour } \beta=\beta_0, \text{ si } V \text{ est fermé et } X \text{ ouvert,} \end{cases} \\ 4.\ C=L\delta\left(\frac{\eta\tau}{1+\mu_1}+(n+\beta)k_1\right) \ldots \text{ pour } \beta>\beta_0. \end{cases}$$

D. Si en ***second*** lieu, les voitures ne sont chargées qu'en ***montant*** la rampe, et vides en la descendant, de sorte que $k_2=\frac{1}{3}k$ (236), les formules (470) donnent

$$472.\begin{cases} 1.\ C=2L\delta(\eta+\frac{2}{3}nk_1) \ldots\ldots\ldots \text{ pour } \beta=0, \\ 2.\ C=2L\delta(\eta+\frac{1}{3}k_1(2n+\beta_1)) \ldots \text{ pour } \beta<\beta_0, \\ 3.\begin{cases} C=L\delta\left(\eta\left(1+\frac{\tau}{1+\mu_1}\right)+2nk_1\right) \text{ pour } \beta=\beta_0, \text{ les tuyaux } V \text{ et } X \text{ étant ouverts tous les deux,} \\ C=2L\delta(\eta+nk_1) \ldots\ldots\ldots \text{ pour } \beta=\beta_0, \text{ } V \text{ étant fermé et } X \text{ ouvert,} \end{cases} \\ 4.\ C=L\delta\left(\frac{\eta\tau}{1+\mu_1}+(n+\beta)k_1\right) \ldots \text{ pour } \beta>\beta_0. \end{cases}$$

E. De ces formules on tirera des conséquences analogues à celles de (§. 39).

Par ex. (471. 1. 2. 3.) fait voir que dans le cas où la charge das wagons est la même dans les deux directions, la consommation d'air comprimé n'augmente pas, si la voie, au lieu d'être ***horizontale,*** prend une pente $\beta<\beta_0$, même la pente $\beta=\beta_0$ dans le cas où l'on ferme le tuyau V et ne laisse ouvert que

celui X. La pente $\beta = \beta_0$ est déjà assez considérable; suivant (407. 2.) elle peut même aller jusqu'à 0,00666... ou 1 sur 150, de sorte qu'une hauteur de 10 mètres par ex. peut être gravie par une rampe de 1500 mèt. de longueur sans nécessiter des terrassements, et sans augmenter la force de la machine.

On trouvera des résultats analogues en discutant la seconde question (§. 40). En général on verra, qu'aussi pour les *pentes* d'un chemin de fer, les locomotives à air de la seconde sorte sont préférables à celles de la première.

Du frottement des roues propulsives des locomotives à air et à vapeur sur les rails, et du poids à donner à ces machines.

57.

Il y a encore à discuter cette matière avant d'entrer dans l'application des résultats trouvés jusqu'ici pour les locomotives, aux deux systèmes No. IV et V (§. 4) des chemins de fer.

A. Il faut que le frottement des roues de propulsion d'une locomotive ne soit jamais moindre que la force de traction nécessaire pour mettre en mouvement le train à la tête duquel elle doit être placée. Cette force, Q étant le poids du train, est

$$473. \quad Z = Q(n + \operatorname{tang}\beta) \text{ (103).}$$

Toutefois le frottement des roues de propulsion de la locomotive sur les rails sera une *certaine partie du poids* de la locomotive qui pèse sur les roues, du moins en tant, qu'il est plus fort ou plus faible dans la *même proportion* que ce poids. Donc le poids Q du train depend du *poids de la locomotive,* dont on ne fait agir qu'une partie sur les roues de propulsion, ou bien aussi la totalité, en couplant les autres roues de la machine aux roues qui portent les manivelles. Il est ici absolument indifférent, quelle est la force motrice, celle de la vapeur, ou celle de la tension de l'air.

En désignant par P la *partie* du poids de la machine que l'on veut faire agir sur les roues de propulsion (de sorte que P ne peut être plus fort que le poids de *toute* la machine, mais seulement plus faible), et par mP la partie de P qui est égale au frottement, il faut donc qu'on ait *au moins*

$$474. \quad mP = Z = Q(n + \operatorname{tang}\beta).$$

Donc Q ne pourra être *plus grand* que

$$475. \quad Q = \frac{mP}{n + \operatorname{tang}\beta},$$

où P de son côté ne peut être plus grand que le poids total de la locomotive.

B. En tant que je sache, des expériences ***directes*** et suffisantes pour déterminer la partie ***mP,*** que le frottement sur les rails est du poids ***P*** qui le produit, n'ont pas encore été faites. En effet il serait très-difficile de trouver une valeur fixe du coëfficient ***m,*** même en exceptant les cas où les rails sont devenus glissants par la glace, la neige, ou par quelque matière grasse qui peut y être survenue par hasard. On pourra fort bien faire abstraction de ces cas, parceque les rails pourront être facilement nettoyés. Mais les rails, ainsi que les roues, deviennent à la longue lisses et polis, et alors le frottement est tout autre que celui de roues et de rails encore neufs. Néanmoins il est très essentiel de connaître la valeur du coëfficient ***m:*** car si le frottement des roues de propulsion sur les rails n'est pas assez fort, la force de la machine, quelque puissante qu'elle soit, n'aura pas d'effet. Elle tournera les roues sur les rails, et le train n'avancera pas du tout. Or parceque ***m n'a pas*** effectivement une valeur fixe et invariable, il ne reste qu'à chercher la valeur ***moindre*** de ***m,*** pour les cas où les rails et les roues ont atteint leur plus grand poli. Si alors dans d'autres cas ***m*** est plus fort, cela ne nuira pas à l'effet; ce sera au contraire d'autant mieux.

C. Autrefois on soupçonnait la valeur de ***m*** si faible, qu'on doutait même de la possibilité de faire marcher un train d'un poids un peu considérable au moyen des roues de propulsion, frottant simplement les rails d'un chemin de fer. On croyait que des cremaillières et des roues à dents seraient nécessaires au lieu de simples rails; mais on ne tarda pas aussi à reconnaître qu'une telle construction était impraticable

Les premières expériences sur le chemin de Liverpool à Manchester prouvèrent bientôt que le frottement des roues de propulsion sur les rails n'est pas aussi faible qu'on l'avait supposé, et qu'au contraire il était complétement suffisant pour servir de point d'appui à la force nécessaire pour mettre en mouvement un train assez considérable sur les rails, au moins dans le cas où les rampes à gravir n'étaient pas trop raides.

D'après ces premiers essais, quelques ingénieurs évaluèrent le frottement égal à la ***20me partie*** du poids ***P,*** d'autres jusqu'à la ***6me partie.***

D'autres expériences faites plus tard, d'abord en Amérique, prouvèrent que le frottement doit être assez considérable; car des locomotives fesaient monter des rampes de 1 sur 60 et même de 1 sur 40, à des trains d'un assez grand poids. Cela maintenant s'exécute journellement en différents lieux en Amérique, en Angleterre et en France. Dans le second cahier tome 13

page 137 — 145 du Journal des constructions que je publie, j'ai calculé le frottement d'après ces expériences, et il s'est trouvé que le frottement pourra être évalué à la *quatrième* partie du poids.

D. Cependant si même on pouvait supposer dans tous le cas $m = \frac{1}{4}$, il serait encore difficile de produire un frottement des roues de propulsion assez fort, pour servir de point d'appui à la force de traction nécessaire pour faire monter des pentes raides à des trains très-pesants. Car la formule (474) donne

$$476. \qquad P = \frac{Q}{m}(n + \operatorname{tang}\beta):$$

donc si par ex. le poids Q du train, celui de la locomotive y compris, était de 100 000 kil., ce qui n'est pas encore un train fort lourd, il faudrait que sur une pente de 1 sur 40 le poids pour produire le frottement fût

$$477. \qquad P = 4 \cdot 100000(0{,}004 + 0{,}025) = 11600 \text{ kil.}$$

et c'est déjà celui d'une forte locomotive. Mais si les rails deviennent un peu glissants, et que le frottement diminue par ex. jusqu'à moitié, la machine n'aurait plus aucun effet.

E. Or, il est très-essentiel que des trains lourds puissent être transportés avec sécurité, aussi bien sur de fortes pentes que sur des voies moins accidentées sans avoir besoin, pour quelques pentes isolées, de locomotives plus fortes et plus lourdes qu'à l'ordinaire, ou aussi plusieurs machines au lieu d'une seule; il est à désirer généralement que des machines aussi légères que possible soient suffisantes partout; car non seulement le poids propre de la locomotive est une véritable perte de la charge utile, mais les machines lourdes sont aussi la cause d'un mal plus grave encore: elles attaquent beaucoup plus que les autres voitures toute la construction de la voie, et nécessitent des rails plus forts et une construction plus forte qu'elle ne serait nécessaire pour les wagons, ordinairement beaucoup moins pesants que les locomotives. Et veut-on éviter les lourdes machines par le moyen des pentes faibles, on tombe dans des dépenses énormes pour les terrassements, les viaducs et les tunnels. D'ailleurs ce dernier moyen est souvent impraticable, quand il s'agit de franchir des hauteurs inévitables dans les montagnes. Alors il ne reste que les machines stationnaires ou d'autres moyens compliqués; mais ceux-ci sont toujours très-coûteux, et non pas sans danger. Il est donc bien à désirer que des machines ordinaires et peu lourdes puissent suffire dans tous les cas, et que l'insuffisance du frottement de leurs roues ne s'y oppose pas.

F. Le moyen de parvenir à ce but serait ***d'augmenter le frottement des roues de propulsion sur les rails.*** Aussitôt que ce moyen sera prati-

cable, les fortes pentes qui aujourd'hui présentent de si grandes difficultés sur les chemins de fer, ne seront plus à craindre, car la ***descente*** des wagons sur les rampes raides n'est pas, comme on le verra plus bas, aussi dangereuse qu'elle parait l'être. On peut dire que ce n'est premièrement que par le moyen indiqué, que les chemins de fer deviendront ***généralement*** praticables sans occasionner des dépenses énormes dans les cas difficiles.

On a proposé plusieurs moyens pour augmenter le frottement des roues des locomotives sur les rails, sans augmenter le poids de la machine. On a de nouveau proposé les cremaillières et les roues à dents mentionnées plus haut; on a proposé des rouleaux ou galets pressés de côté par des ressorts contre les rails etc. Mais tous les moyens ***compliqués*** seront toujours très-coûteux et dangereux.

Il parait qu'il existe un moyen très-simple, peu coûteux et très-sûr, pour atteindre le but. Je ne sais pas si déjà quelqu'un l'a proposé. Pour le cas, où il ne l'aurait pas encore été, je vais le décrire ici en peu de mots.

Moyen propre pour augmenter le frottement des roues de propulsion des locomotives sur les rails, sans augmenter le poids des machines.

58.

Les roues de propulsion des locomotives sont ordinairement des ***cylindres parfaits***. On ne donne des mentonnets qu'aux autres roues de la machine pour les empêcher de sortir des rails.

Nous proposons de donner aux jantes des roues de propulsion la forme fig. 20, I et II, savoir, de donner à la roue ***deux mentonnets*** chacun de 4 centim. au moins de hauteur. Entre les deux mentonnets la roue doit être parfaitement cylindrique, comme à l'ordinaire, et les deux mentonnets doivent avoir la forme que représente la figure. La largeur de la surface ***cylindrique*** de la roue entre les mentonnets doit ***dépasser*** la largeur des rails ***ordinaires*** d'environ $2\frac{1}{2}$ centim.; elle doit donc être de $8\frac{1}{2}$ centim. environ, et la largeur de toute la jante sera de 14 centim.

Maintenant les rails ordinaires de 6 centim. de largeur seront posés partout où le frottement ordinaire de la surface cylindrique des roues suffit. Ces roues rouleront alors sur les rails comme à l'ordinaire, et comme la figure 20, I. le représente, sans que les mentonnets ***tous deux*** puissent toucher le rail en

même temps. Ce ne sera que l'un ou l'autre des deux qui pourra frotter contre le rail, de la même manière que le mentonnet de tout autre wagon.

Mais sur les pentes si raides que le frottement de la face cylindrique des roues de propulsion sur les rails ne suffit plus, on posera des rails, dont la tête aura une largeur un ***peu plus considérable*** que celle de la face cylindrique des jantes, par ex. une largeur de 9 centim., de sorte que la face cylindrique des jantes ne peut plus descendre jusqu'à la ***surface*** de la tête du rail, qu'au contraire les deux mentonnets touchent alors le rail dans les points *e* et *f*, et que la roue ***enclave*** pour ainsi dire le rail. Les points *e* et *f* seront alors pressés d'une force ***au-dessus*** du poids qui pèse sur la roue, et le frottement sera augmenté proportionnellement.

Soit par ex. φ l'angle que les faces *ag* et *bh* font avec une ligne ***perpendiculaire,*** et ***P*** le poids qui pèse sur la roue. Alors ce poids produit une force $\frac{P}{\sin\varphi}$ en direction perpendiculaire sur les faces *ag* et *bh,* et cette force est ***toujours plus grande*** que ***P;*** elle l'est d'autant plus que φ est plus petit. Or l'angle φ étant ***arbitraire,*** ou pourra augmenter ***à volonté*** la pression sur les faces des mentonnets, et par conséquent le frottement, sans augmenter le poids ***P*** qui pèse sur les roues. Par ex. en fesant $\varphi = 30$ degrés, $\sin\varphi$ étant $= \frac{1}{2}$, le frottement sera ***doublé;*** par un angle φ de $19^0\,28'$ il sera ***triplé*** etc.

Ce moyen n'aura pas, comme on pourrait le croire, d'inconvénients essentiels. Le seul mal sera, que la tête des rails larges sera plus tôt usée que celle des rails ordinaires. Mais vu que d'après l'expérience, l'usure des rails par les roues s'opère fort lentement, on sent bien que vis à vis les grands avantages que ce moyen présente, le mal est insignifiant. De l'autre côté, l'emploi du moyen proposé, au lieu d'angmenter le ***danger*** du trajet, le ***diminuera,*** par l'effet des deux mentonnets des roues de propulsion, qui, ayant une hauteur considérable, s'opposeraient plus fortement au déraillement de la locomotive.

Par ce moyen on pourra donc, sans de grands frais, et sans aucun danger, donner aux locomotives la faculté de faire monter un train considérable sur une pente ***quelconque:*** toujours sans augmenter le poids de la machine; car on pourra augmenter le frottement des roues de propulsion presque au degré que l'on le voudra.

Soit comme ci-dessus (§. 57. ***D.***) le poids ***Q*** du train $= 100\,000$ kil. En employant le moyen proposé sur les pentes de 1 sur 40, on trouve pour

$m = \frac{1}{4}$ et $\varphi = 19^0, 26$,

478. $P = \frac{4}{3} \cdot 100000 (0{,}004 + 0{,}025 \ldots .) = 3866$ kil.;

même pour $m = \frac{1}{6}$ on n'obtient que

479. $P = 5800$ kil.,

et ce n'est que la moitié du poids (477) qui devrait pèser sur les roues sans l'emploi du moyen.

Le poids de la locomotive sera donc presque indépendant du poids du train et de la raideur des rampes qui pourraient se présenter, aussitôt qu'on se servira du moyen proposé. Même pour le train le plus lourd, de 150000 kilogr. par exemple, une locomotive de 8700 kilogr. suffirait encore sur une pente de 1 sur 40, en supposant que le frottement soit seulement le *sixième* du poids qui le produit, et ces 8700 kilogr. ne sont pas encore le poids d'une locomotive ordinaire.

De la descente des trains sur les rampes.

59.

Nous disions (§. 57. *F.*) que la descente des pentes raides n'offre pas de difficultés notables.

A. En effet, la force qui pousse en aval un train du poids Q est

480. $Z = Q(\text{tang}\beta - n)$.

Cela ne fait pas même pour une pente de 1 sur 40, Q étant supposé comme ci-dessus $= 100000$ kil.:

481. $Z = 100000\,(0{,}025 - 0{,}004) = 2100$ kilogr.

Donc: si le poids quadruple ou sextuple c'est-à-dire celui de 2 à 3 wagons est enrayé, d'abord par des vis, puis par des sabots, de sorte que les roues des wagons sont complétement empêchées de tourner, la force qui pousse le train sera déjà détruite.

B. Si des locomotives à air sont en tête du train, leur faculté de puiser de l'air de l'atmosphère et de le comprimer dans un bassin, facilite l'enrayement, et est encore très-propre à le préparer.

C. Or aussi la force qui pousse un train sur une rampe, même s'il n'est pas enrayé, ne lui donne pas aussi promptement qu'il le parait une vitesse exorbitante.

La force *accélératrice* que produit la force *motrice* Z (480) est

482. $p = \frac{Z}{Q} = \text{tang}\beta - n.$

Elle engendre la vitesse $dv = 2gpt$ dans le temps dt, de sorte que $v = 2gpt +$ const., et si $v = v_1$ pour $t = 0$,

$$483. \qquad v = 2gpt + v_1.$$

Le train ayant cette vitesse, parcourt la distance $\partial x = v\partial t = 2gpt\partial t + v_1\partial t$ dans le temps ∂t, donc on a $x = gpt^2 + v_1 t +$ const., et comme const. $= 0$, x étant 0 pour $t = 0$,

$$484. \qquad x = gpt^2 + v_1 t.$$

En substituant dans (484) la valeur de t que donne (483), savoir $t = \frac{v - v_1}{2gp}$, on obtient $x = gp\frac{(v-v_1)^2}{4g^2p^2} + v_1\frac{v-v_1}{2gp}$ ou bien

$$485. \qquad x = \frac{v^2 - v_1^2}{4gp} = \frac{v^2 - v_1^2}{4g(\text{tang}\beta - n)} \quad (482).$$

De la on tire $4gpx = v^2 - v_1^2$ et $v = \sqrt{(4gpx + v_1^2)}$ ou bien

$$486. \qquad v = \sqrt{[4gx(\text{tang}\beta - n) + v_1^2]}.$$

Il faut que le conducteur du train prenne bien soin de diminuer la vitesse avant l'arrivée du train au *sommet* de la rampe; alors la vitesse au bas de la rampe ne deviendra pas trop considérable, si la rampe n'est pas trop raide et trop longue.

Soit par ex. $v_1 = 3{,}14$ mèt., $\beta = \frac{1}{40}$, $v = 12{,}55$ mèt., la formule (485) donne

$$487. \qquad x = 359 \text{ mèt.},$$

c'est-à-dire, le train abandonné librement à l'action de la gravité, pourra descendre une rampe de 1 sur 40 sur une distance de 359 mèt. et par conséquent d'une hauteur de $\frac{359}{40} = 9$ mèt., avant d'arriver à une vitesse de 12,55 mèt. par seconde (6 milles de Prusse par heure). Il pourra même parcourir sur cette rampe une distance de

$$488. \qquad x = 656 \text{ mèt.}$$

avant d'arrivèr à une vitesse de 16,73 mèt. par sec. (8 milles de Prusse par heure). Il aura alors descendu une hauteur de $\frac{656}{40} = 16{,}4$ mèt., et la vitesse de 16,73 mèt. par sec. n'est pas encore dangereuse, à moins qu'il ne se trouve pas dans la rampe même, ou à sa base, des courbes de faible rayon.

D. Ce n'est que sur les rampes plus ***longues*** que l'enrayement ordinaire sera nécessaire. Il faut alors diviser ces pentes en plusieurs parties, et les séparer par des voies horizontales. Aussi fera-t-on bien de placer les *courbes,* qui peut-être seront nécessaires, au ***sommet*** de la rampe (jamais vers sa base),

supposé que des rayons assez forts leur puissent être donnés; car aussi les courbes diminuent la vitesse du mouvement.

60.

A. Si dans les cas où il y a de grandes hauteurs à gravir par des fortes pentes, on se sert des systèmes de chemins de fer N^os^. I, II ou III à tube de propulsion, surtout de l'un des deux N°s. II et III, où l'air comprimé pousse le train devant lui: la tension de cet air, aussi bien qu'elle ***pousse*** le train en montant, peut aussi servir pendant la descente des wagons à modérer leur vitesse qui sans cela pourrait devenir dangereuse; toutefois supposé que le conducteur du train ait un moyen, par ex. celui d'un télégraphe électrique, pour indiquer instantanément au machiniste des pompes ou des réservoirs qu'une modération, ou aussi peut-être une augmentation de la vitesse, est nécessaire.

B. Supposons qu'une hauteur de 150 mètres ne puisse être montée que par des pentes de 1 sur 30; non pas sans beaucoup de courbes peut-être. Supposons que le poids du train soit de 77 300 kilogr. au lieu de 92 770, parcequ'il n'y a pas ici de locomotive: la force nécessaire pour faire ***monter*** ce train sera suivant (473)

$$489. \quad Z = 77300\left(\tfrac{1}{250} + \tfrac{1}{30}\right) = 2725 \text{ kil.}$$

La force avec laquelle la ***gravité*** pousse le train en ***descendant,*** est

$$490. \quad Y = 77300\left(\tfrac{1}{30} - \tfrac{1}{250}\right) = 2141 \text{ kil.}$$

C. Dans ce cas un chemin de fer ***atmosphérique*** (système N^o^. I) n'est déjà guère applicable. Car si même on raréfiait l'air dans le tube de propulsion jusqu'à $\frac{1}{6}$ atm., ce qui est peu avantageux, on ne produirait par cela qu'une pression de $\frac{5}{6}$ atm. sur le piston, c'est-à-dire une pression de 7849 kilogr. par mètre carré (15), et pour donner au piston la force propulsive nécessaire, il lui faudrait une aire de $\frac{27}{18}\frac{25}{49} = 0{,}347$ mèt. carrés; il faudrait au tube de propulsion un diamètre de près de 7 décimètres. Mais un tuyau de ce diamètre serait extrêmement coûteux.

D. Si au contraire on veut se servir de l'un des deux systèmes II ou III, la construction sera assez facilement praticable. Par ex. en donnant au tube de propulsion un diamètre de 36,6 centimètres, de sorte qu'il ait une aire de 0,1053 mèt. carré, une pression de ***trois*** atm. donne déjà une pression de $3 \cdot 0{,}1053 \cdot 9418 = 2975$ kil., et par conséquent plus de force qu'il n'est nécessaire (489). Donc il n'y a qu'à comprimer l'air derrière le piston à une tension de 3 atm. pour obtenir la force de propulsion nécessaire, et cette com-

pression de l'air est admissible sans danger, surtout dans le cas du système No. II à tuyau ***en fonte.***

E. La force de piston nécessaire pour faire face à celle (490) dont la gravité pousse le train en ***descendant,*** est moindre. Elle n'est que de 2,3 atm. Donc si pour la ***descente*** du train, comme pour la ***montée,*** on veut comprimer l'air dans le tube de propulsion à une tension de 2,3 atm. et donner au conducteur du train le moyen d'indiquer au machiniste des pompes, au pied de la rampe, ce qu'il a à faire, celui-ci n'a qu'à faire entrer au moyen du robinet plus ou moins, ou pas du tout d'air comprimé dans le tube, pour diminuer ou pour augmenter la vitesse des wagons. La tension de l'air comprimé dans le tube qui ***s'oppose*** ici au piston, et qui doit être précisement égale à la force Y (490), et ***invariable,*** si l'on veut que la vitesse de descente soit ***constante,*** augmentera bientôt si, pendant que le train poursuit sa course, le robinet est fermé; elle diminuera donc la vitesse et parviendra enfin à la détruire tout-à-fait. Donc la tension de l'air peut ici prendre la place de ***l'enrayement.*** Mais son effet n'est pas ni aussi ***efficace*** ni aussi ***prompt*** qu'il parait l'être. Nous allons calculer cet effet.

F. Soit δ le diamètre du tube de propulsion et $1+\mu$ la tension de l'air dans ce tube: la pression effective de l'air sur le piston sera $\frac{1}{4}\pi\delta^2\mu\sigma$ kilogr. Donc si l'on veut que la vitesse de la descente soit ***constante,*** il faut d'abord que Y soit

$$491. \qquad Y = Q(\operatorname{tang}\beta - n) = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2\mu\sigma.$$

Soit a la distance que le train a encore à parcourir jusqu'à l'extrémité du tube au pied de la rampe, la masse d'air atm. contenue dans le tube ***devant*** le piston sera

$$492. \qquad = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2(1+\mu)a.$$

Soit x la distance qu'à parcourue le train en continuant sa course avec la vitesse c: l'air devant le piston sera comprimé dans l'espace $\frac{1}{4}\pi\delta^2(a-x)$ si le machiniste des réservoirs a fermé le robinet, et par là fermé à l'air la sortie. La tension de l'air devant le piston a donc augmenté jusqu'à $\frac{\frac{1}{4}\pi\delta^2(1+\mu)a}{\frac{1}{4}\pi\delta^2(a-x)} = (1+\mu)\frac{a}{a-x}$. Donc une force de $\frac{1}{4}\pi\delta^2\sigma(1+\mu)\frac{a}{a-x}$ poussera maintenant le train de bas en haut, pendant que la pression de l'atmosphère sur l'autre face du piston le pousse avec la force $\frac{1}{4}\pi\delta^2\sigma$ de haut en bas. A cette dernière force se joint celle de la gravité $Y = \frac{1}{4}\pi\delta^2\mu\sigma$ (491): donc la force ***totale*** qui pousse

le train de ***haut en bas*** est

$$493. \quad \tfrac{1}{2}\pi\delta^2\sigma\left[1+\mu-(1+\mu)\frac{a}{a-x}\right] = -\tfrac{1}{4}\pi\delta^2\sigma(1+\mu)\frac{x}{a-x}.$$

Cette force ***motrice***, agissant sur la masse Q, produit la force ***accélératrice***

$$494. \quad p = -\frac{\frac{1}{4}\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)\frac{x}{a-x}.$$

Celle-ci engendre dans le temps ∂t la vitesse

$$495. \quad \partial v = 2gp\partial t,$$

et le train parcourt avec la vitesse v dans le temps ∂t l'espace

$$496. \quad \partial x = v\partial t.$$

De (496) on tire $\partial^2 x = \partial v \partial t = 2g\partial p t^2$ (495), donc on a

$$497. \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 2gp.$$

En multipliant (497) par $2\partial x$, on obtient

$$498. \quad \frac{2\partial x\partial^2 x}{\partial t^2} = 4gp\partial x = -\frac{g\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)\frac{x\partial x}{a-x} \quad (494)$$

et en fesant à droite $a-x=y$, de sorte que $\partial x = -\partial y$:

$$499. \quad \frac{2\partial x\partial^2 x}{\partial t^2} = +\frac{g\pi\partial^2\sigma}{Q}(1+\mu)\frac{(a-y)\partial y}{y}.$$

L'intégrale de cette expression est

$$500. \quad \frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{g\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)[a\log\text{nat}\, y - y] + \text{const.},$$

et comme $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ (496), on obtient

$$501. \quad v^2 = \frac{g\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)[a\log\text{nat}\, y - y] + \text{const.}$$

Or nous avons supposé $v = c$ pour $x = 0$ ou $y = a$: donc (501) donne $c^2 = \frac{g\pi\delta^2\sigma(1+\mu)}{Q}[a\log\text{nat}\, a - a] + \text{const.}$ et

$$502. \quad \text{Const.} = c^2 - \frac{g\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)[a\log\text{nat}\, a - a].$$

Cela substitué dans (501.) donne $v^2 = c^2 + \frac{g\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)\left[a\log\text{nat}\frac{y}{a} + a - y\right]$ ou bien

$$503. \quad c^2 - v^2 = \frac{g\pi\delta^2\sigma}{Q}(1+\mu)\left[a\log\text{nat}\frac{a}{a-x} - x\right].$$

De cette équation, en y posant $v = 0$, on tirera la distance x, que le train a encore à parcourir jusqu'à ce qu'il soit arrêté tout-à-fait. Elle donne

$$504. \quad \frac{c^2 Q}{g\pi\delta^2\sigma(1+\mu)} = a(\log\text{nat}\, a - \log\text{nat}(a-x)) - x.$$

Substituant encore dans cette équation la valeur de $\mu = \frac{Q(\text{tang}\,\beta - n)}{\frac{1}{4}\pi\delta^2\sigma}$ (491), on obtient

505. $$a[\log\text{nat}\,a - \log\text{nat}(a-x)] - x = \frac{c^2 Q}{g(\pi\delta^2\sigma + 4Q(\text{tang}\,\beta - n))},$$

d'où l'on pourra calculer x par quelques essais.

G. Dans l'exemple ci-dessus de $Q = 77300$ kil., $\delta = 36{,}6$ centim. et $\text{tang}\,\beta = \frac{1}{30}$, on obtient

506. $$\frac{Q}{g(\pi\delta^2\sigma + 4Q(\text{tang}\,\beta - n))} = 1{,}017,$$

donc (505) donne

507. $$a[\log\text{nat}\,a - \log\text{nat}(a-x)] - x = 1{,}017\,c^2,$$

ou bien, pour les logarithmes des Briggs:

508. $$a[\log\text{Br}\,a - \log\text{Br}(a-x)] - 0{,}4343\,x = 0{,}4417\,c^2.$$

Soit par ex. la distance a, que le train a encore à parcourir, $= 3138{,}5$ mèt. (10000 pieds de Prusse), et la vitesse c, qu'il a acquise, $= 12{,}5$ mèt., la formule (508) donnera par quelques essais $x = 972$ mèt., et à cette distance la vitesse du train sera anéantie tout-à-fait. Pour $a = 1255$ mèt. on trouvera $x = 571$ mèt., et pour $a = 314$ mèt., $x = 232$ mèt.

On voit par ces exemples que l'air comprimé n'anéantit pas *promptement* la vitesse du train, et cela d'autant moins encore, que, bien que le robinet de sortie de l'air du tube de propulsion soit fermé, quelque peu d'air s'échappera toujours encore par la soupape longitudinale. Aussi cette manière d'arrêter le train est elle *dangereuse;* car au moment où le train est rentré au repos, l'air dans le tube a été comprimé jusqu'à

509. $$\alpha = (1+\mu)\frac{a}{a-x} - 1 = \frac{\mu a + x}{a-x}$$ atmosphères.

Cela fait dans les exemples ci-dessus, μ étant supposé comme dans (*E.*) $= 2{,}3$: $\alpha = 3{,}81$, 506 et 11,69 atm.; et une tension si forte pourra faire *crever* le tube.

Une construction, où l'air est comprimé derrière le piston dans un tube de propulsion, est donc fort propre à faire *monter* un gros train à une hauteur considérable et sur une forte pente, et aussi à modérer convenablement la vitesse de la descente: mais elle est très impropre à *arrêter promptement* le train descendant. Pour cela il faudra toujours se servir des moyens ordinaires d'enrayement.

Moyen d'éviter les difficultés et embarras de la correspondance entre le conducteur du train et le machiniste des pompes, sur les chemins de fer à tube de propulsion.

61.

Nous proposerons ici un moyen à l'aide duquel le conducteur du train lui-même, et *sans* le secours du machiniste des pompes, pourra diminuer ou augmenter la vitesse du train; au moins dans le cas, où l'air dans le tube de propulsion n'est pas raréfié, mais *comprimé.* Cette proposition ne sera pas déplacée ici, parceque le même moyen peut également servir pour *arrêter* le train.

A. Qu'on se figure dans le wagon conducteur, sur lequel le conducteur du train a sa place, un tube conduisant dans l'intérieur de la tige de propulsion jusque dans le piston, et de là, en perçant la tête du piston qui fait face à l'air *comprimé,* parvenant jusqu'à cet air. Ce tuyau doit être ouvert en bas vers l'air comprimé, mais en haut, le conducteur doit pouvoir le fermer à volonté par un robinet H_1. Nous désignerons ce tube par *A.*

B. Supposons un second tube *B* parfaitement conforme à celui *A,* mais conduisant dans l'intérieur de la tige de propulsion et du piston, à l'air *non comprimé,* de sorte qu'il percera *l'autre* tête du piston. Le robinet par lequel le conducteur pourra fermer ou ouvrir à volonté ce second tube, soit désigné par H_2.

C. Soient mis en communication les deux tubes *A* et *B* par un troisième tube *C.* Les robinets H_1 et H_2 doivent être construits de sorte que le conducteur par leur moyen puisse mettre en communication les deux masses d'air se trouvant de l'un et de l'autre côté du piston, tant avec l'atmosphère qu'entre elles.

D. Le tube de propulsion et la soupape longitudinale seront construits comme le réprésentent les figures 1, 2, 3 ou 3, 4, 5, avec cette différence, seulement que les têtes du piston ne boucheront pas seulement la moitié supérieure du tube, comme dans fig. 3; mais *tout* le tube, de sorte que les têtes du piston pourront être jointes entre elles, seulement par des barres de fer. Le tube de propulsion ne sera pas ouvert à l'extrémité opposée aux pompes, mais fermé.

E. Cela posé: supposons que le train des wagons *monte* la rampe. Alors le machiniste des pompes ou des réservoirs stationnaires n'a qu'à prendre garde que la tension de l'air comprimé dans le tube de propulsion ne diminue jamais au delà de celle qui est nécessaire pour gravir les plus fortes pentes

de la rampe; cette tension lui pourra être indiquée très précisément, et un baromètre ou manomètre ordinaire lui indiquera celle de l'air dans le tube.

Si maintenant le train arrive à des pentes *moins fortes,* et que par conséquent la force propulsive de l'air comprimé dans le tube devienne *trop forte,* et augmente trop la *vitesse,* le conducteur mettra en communication entre eux les deux tuyaux ***A*** et ***B*** au moyen des robinets H_1 et H_2. Aussitôt l'air comprimé *derrière* le piston, s'élancera dans l'autre partie du tube de propulsion *devant* le piston, où l'air n'est pas comprimé; donc la pression sur le piston, par conséquent la force propulsive, et par suite la vitesse du train *diminueront.* Il est vrai que le machiniste des pompes ou des réservoirs, suivant ses ordres de maintenir toujours la *même* tension de l'air dans le tube, *réintroduira* aussitôt l'air que le conducteur du train aura laissé s'écouler dans l'autre partie du tube; mais néanmoins la pression sur le piston sera diminuée, parceque l'air *devant* le piston n'aura plus la simple tension de l'atmosphère et qu'il aura été comprimé par l'air que le conducteur y aura introduit. Ainsi le conducteur du train pourra par ce moyen diminuer la vitesse du train, *sans* avoir besoin de correspondre avec le machiniste des pompes ou des réservoirs. Il pourrait même réduire *à zéro* la force propulsive, par le même moyen, en laissant toujours s'écouler l'air comprimé dans la partie du tube de propulsion *devant* le piston, jusqu'à ce que la tension de l'air soit la *même* devant et derrière le piston; mais cela ne sera jamais nécessaire en *montant* une rampe, parceque la force de la *gravité* s'oppose ici au piston.

Arrivé de nouveau à des pentes *plus fortes,* où une plus grande force de propulsion est nécessaire, le conducteur du train n'aura qu'à fermer le tube ***A,*** et qu'à ouvrir celui ***B*** vers l'atmosphère, pour laisser sortir cet air comprimé qu'il avait auparavant laissé entrer *devant* le piston. Car aussitôt la pression qui *s'opposait* au piston, *diminuera,* et celle qui *pousse* le piston, *augmentera.*

F. Si le train *descend* la rampe, et que les pentes sont si fortes, que de l'air comprimé soit necéssaire pour retenir le train, le machiniste des pompes ou des réservoirs n'a également qu'à prendre garde que la tension de l'air comprimé dans le tube de propulsion *devant* le piston, ne diminue jamais au delà de celle qui est nécessaire pour les pentes *les plus fortes* de la rampe. Si alors le train arrive à des pentes plus faibles, le conducteur du train laissera s'échapper par les tubes ***A*** et ***B*** de l'air comprimé de devant derrière le piston, et aussitôt la résistance de l'air comprimé devant le piston diminuera.

Arrivé de nouveau à des *plus fortes* pentes, le conducteur laissera s'échapper dans l'atmosphère l'air comprimé qu'il a introduit dans le tuyau derrière le piston.

G. On verra aisément comment le conducteur du train, au moyen du maniement des robinets des tuyaux *A* et *B*, pourra régler la vitesse du train, *sans* avoir besoin de correspondre avec le machiniste des pompes ou des wagons, même dans le cas où les pentes de la voie sont si faibles, qu'en descendant la gravité seule ne pousse plus le train, et aussi dans le cas où la voie monte et descend alternativement. Dans ces cas, l'air doit être comprimé dans le tube de propulsion des deux côtés du piston, mais à des tensions *inégales*, et les machinistes aux deux extrémités du tube doivent prendre garde de conserver toujours la même tension de l'air.

H. Le télégraphe électrique, ou d'autres moyens de correspondance entre le conducteur du train et les machinistes aux extrémités du tube, pourront donc être évités par l'emploi du moyen indiqué. Il est vrai que son application causera une consommation *additionnelle* d'air comprimé, parceque suivant la description ci-dessus il peut arriver que le conducteur soit obligé de laisser sortir de l'air comprimé dans l'atmosphère, dont par conséquent la force est *perdue,* mais toutefois l'effet de ce moyen sera plus *prompt* que l'effet de la manoeuvre du machiniste des pompes; car le conducteur lui même fait ici ce que le machiniste ferait, et le temps nécessaire pour la correspondance sera gagné. Mais ce qui est beaucoup plus important: les *dangers* que peuvent causer une absence momentanée du machiniste, ou des méprises, seront évités. L'application du moyen est donc à recommander surtout dans le cas des longues et fortes pentes, et ses effets compenseront bien la consommation additionnelle d'air comprimé.

I. Le moyen sera également applicable pour *arrêter* tout-à-fait le train, et préférable à ce que le machiniste des pompes peut faire dans ce but (par les raisons *H*). Mais pour arrêter *subitement* le train, l'enrayement ordinaire seul sera propre.

K. Aussi dans le cas de la *raréfaction* de l'air dans le tube de propulsion *devant* le piston, le moyen proposé pourrait être appliqué, mais non pas sans une perte encore plus considérable de force.

(La fin de ce mémoire au cahier prochain.)

27.

Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. C. G. J. Jacobi.

I.

Paris, Janvier 1843.

L'étude de votre mémoire publié dans le journal de M. *Crelle* sous le titre: „De functionibus quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur," m'a conduit pour la division des arguments dans ces fonctions, à un théorème analogue à celui que vous avez donnez dans le 3e volume du même journal, pour obtenir l'expression la plus simple des racines des équations traitées par *Abel*. M. *Liouville* m'a engagé à vous écrire pour vous soumettre ce travail; oserais-je espérer Monsieur que vous daignerez l'accueillir avec toute l'indulgence dont il a besoin?

Soit:

$$\Delta(x) = \sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]};$$

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\partial y}{\Delta(y)}, \quad u' = \int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\partial y}{\Delta(y)},$$

$$x = \lambda_0(u, u'), \quad y = \lambda_1(u, u').$$

Faisons pour abréger:

$$x_n = \lambda_0(nu, nu'), \quad y_n = \lambda_1(nu, nu'),$$

ces deux quantités seront déterminées simultanément par les deux racines d'une équation du second degré,

$$Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0,$$

dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$; j'ai trouvé qu'ils étaient de la forme $P + Q\Delta(x)\Delta(y)$, où P et Q sont des fonctions rationnelles de x et y; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui suit.

Je partirai de ce que les racines simultanées des deux équations

$$(A.) \quad Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0, \quad Uy_n^2 + U'y_n + U'' = 0$$

sont données par les formules

$$x = \lambda_0\Big(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\Big),$$

$$y = \lambda_1\Big(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\Big),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$.

Cela posé, soit pour abréger

$$I = mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4, \quad I' = mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4,$$

et désignons par $f(x, y)$ une fonction rationnelle symétrique de x et y, et par p, q, r, s quatre racines de l'équation binome $x^n = 1$, je dis qu'on aura:

$$(B.)\quad \sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1} \Big\{f\Big(\lambda_0\Big(u + \frac{I}{n}, u' + \frac{I'}{n}\Big), \lambda_1\Big(u + \frac{I}{n}, u' + \frac{I'}{n}\Big)\Big)\Big\} p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}$$
$$= \sqrt[n]{[A + B\Delta(\lambda_0(nu, nu')) + C\Delta(\lambda_1(nu, nu')) + D\Delta(\lambda_0(nu, nu'))\Delta(\lambda_1(nu, nu'))]},$$

A, B, C, D désignant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$.

Le premier membre peut d'abord se ramener à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$. En effet, d'après la propriété fondamentale des fonctions λ_0, λ_1, un terme quelconque, tel que $f\Big(\lambda_0\Big(u + \frac{I}{n}, u' + \frac{I'}{n}\Big), \lambda_1\Big(u + \frac{I}{n}, u' + \frac{I'}{n}\Big)\Big)$ pourra être exprimé rationnellement en $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$, $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$, et les quantités analogues relatives à la division des indices. Or on trouve aisément ces formules:

$$\Delta(x) = (\alpha + \beta x)\frac{dx}{du} + (\alpha' + \beta' x)\frac{dx}{du'}, \qquad \Delta(y) = (\alpha + \beta y)\frac{dy}{du} + (\alpha' + \beta' y)\frac{dy}{du'}$$

qui montrent que les radicaux carrés $\Delta(\lambda_0(u, u'))$, $\Delta(\lambda_1(u, u'))$ pourront s'exprimer rationnellement en $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$; car en faisant disparaître les irrationnelles des équations $(A.)$, puis les différentiant successivement par rapport à u et u', on obtiendra les expressions des dérivées partielles en fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$.

Représentons le premier membre de l'équation $(B.)$ par $\varphi(u, u')$, on démontrera bien aisément que:

$$\varphi\Big(u + \frac{ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4}{n},\ u' + \frac{ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4}{n}\Big)$$
$$= p^{-k} q^{-k'} r^{-k''} s^{-k'''} \varphi(u, u'),$$

quels que soient les entiers k, k', k'', k'''.

En l'élevant à la puissance n^e, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, qui ne change point, en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il suit

de là et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations (*A.*).

J'observe actuellement qu'il a été introduit les quantités $\frac{d\lambda_0(nu, nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_0(nu, nu')}{du'}$, $\frac{d\lambda_1(nu, nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_1(nu, nu')}{du'}$ qu'on pourra éliminer par les formules suivantes:

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\frac{dx}{du} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha' + \beta' y), \qquad (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\frac{dx}{du'} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha + \beta y),$$

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\frac{dy}{du} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha' + \beta' x), \qquad (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\frac{dy}{du'} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha + \beta x).$$

Or, une fonction rationnelle quelconque des deux radicaux $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$ peut toujours être mise sous la forme

$$a + b\Delta(\lambda_0(u,u')) + c\Delta(\lambda_1(u,u')) + d\Delta(\lambda_0(u,u'))\,\Delta(\lambda_1(u,u')),$$

ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

En supposant successivement: $f(x,y) = x + y$, et $f(x,y) = xy$, on aura séparément par une somme de $n^4 - 1$ radicaux n^{es} les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront finalement celles des équations proposées. On pourrait aussi faire voir qu'il suffit de connaître l'un d'eux, l'autre se déterminant rationnellement par celui-là.

Pour obtenir la division des indices, soit

$$u = \frac{ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4}{n} = \frac{I}{n}, \quad u' = \frac{ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4}{n} = \frac{I'}{n},$$

on aura: $x_n = 0$, $y_n = 0$, et les équations à résoudre seront

$$(C.) \qquad U' = 0, \quad U'' = 0;$$

leurs racines seront comprises dans les formules

$$x = \lambda_0\Big(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\Big),$$

$$y = \lambda_1\Big(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\Big),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$. Mais si l'on suppose le nombre n premier, on verra aisément qu'en supposant successivement:

$$(D.) \quad I_1 = i\sqrt{-1}, \quad I'_1 = i'_1\sqrt{-1}; \quad I_2 = \mu i_1\sqrt{-1} + i_2, \quad I'_2 = \mu i'_1\sqrt{-1} + i'_2;$$
$$I_3 = \mu i_1\sqrt{-1} + \mu' i_2 + i_3\sqrt{-1}, \quad I'_3 = \mu i'_1\sqrt{-1} + \mu' i'_2 + i'_3\sqrt{-1};$$
$$I_4 = \mu i_1\sqrt{-1} + \mu' i_2 + \mu'' i_3\sqrt{-1} + i_4, \quad I'_4 = \mu i'_1\sqrt{-1} + \mu' i'_2 + \mu'' i'_3\sqrt{-1} + i'_4;$$

on pourra leur substituer les suivantes:

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right),$$

en excluant la solution zéro, et donnant à m, μ, μ', μ'', les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$.

Mais comme les intégrales qui entrent dans les expressions de u et u' ont été prises à la limite inférieure zéro, on a $\lambda_0(-u, -u') = \lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(-u, -u') = \lambda_1(u, u')$, d'où il arrive que les $n^4 - 1$ solutions des équations (*C.*) sont égales deux à deux; et il suffira de prendre dans les formules précédentes, $m = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$.

Soit toujours $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de x et y, on établira d'abord, qu'en désignant par I l'une des quantités I_1, I_2, I_3, I_4, par I' la quantité correspondante au second argument, l'expression

$$f\left(\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right)$$

peut se ramener quel que soit le nombre entier k, à une fonction rationnelle de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$. Cela résulte de ce que les radicaux $\Delta\left(\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right)$, $\Delta\left(\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right)$ s'expriment eux-mêmes rationnellement en $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, comme il est facile de le voir d'après ce qui a été dit plus haut.

Cela posé, l'expression

$$\sum_0^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_k \left\{f\left(\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right)\right\}^l,$$

où l est un entier quelconque, pourra être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qu'on démontrera aisément jouir de la propriété que:

$$\varphi\left(\nu\frac{I}{n}, \nu\frac{I'}{n}\right) = \varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right),$$

quel que soit le nombre entier ν.

Donc, donnant successivement à I et I' toutes les valeurs correspondantes comprises dans les formules $(D.)$, on pourra construire une équation entièrement rationnelle, qui aura pour racines les valeurs qui en résulteront pour la fonction $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$.

Il est bien facile de voir que son degré sera le nombre

$$1+n+n^2+n^3 = \frac{n^4-1}{n-1};$$

ainsi, l'équation de degré $\frac{1}{2}(n^4-1)$ de laquelle dépend la détermination d'une fonction rationnelle symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, peut être décomposée en $\frac{n^4-1}{n-1}$ facteurs du degré $\frac{1}{2}(n-1)$, au moyen des racines d'une équation rationnelle du degré $\frac{n^4-1}{n-1}$.

Les équations de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ sont résolubles par radicaux. Pour le faire voir en peu de mots, soit ϱ une racine primitive par rapport au nombre premier n, on établira d'abord que leurs racines peuvent être représentées par la formule

$$f\left(\lambda_0\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right)\right),$$

en supposant $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-3)$; et si l'on considère la puissance de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ de l'expression

$$\sum_0^{\frac{1}{2}(n-3)} {}_k f\left(\lambda_0\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right)\right)\theta^k,$$

où θ est une racine de $\theta^{\frac{1}{2}(n-1)}-1=0$, on verra qu'elle peut être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$ que je représenterai, pour abréger, par $\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qui jouira, comme la fonction φ, de la propriété que:

$$\psi\left(\frac{\nu I}{n}, \frac{\nu I'}{n}\right) = \psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right).$$

Dès lors on démontre aisément qu'on peut trouver une fonction rationnelle $F(x)$ telle, que pour toutes les valeurs de I et I' comprises dans les formules $(D.)$, on ait:

$$\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right) = F\left(\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right).$$

Or, connaissant la fonction ψ, on sait comment en déduire toutes les racines de l'équation proposée.

Les considérations précédentes semblent pouvoir s'appliquer également aux autres classes des transcendantes nommées généralement par ***Legendre*** fonctions ultra-elliptiques; il est facile en effet de trouver les formules suivantes. Soit

$$\Delta(x) = \sqrt{(x(1-x)(1-\lambda_1^2 x)\ldots(1-\lambda_{2n+1}^2 x))},$$
$$\theta_k(x) = \alpha_k + \beta_k x + \gamma_k x^2 + \ldots + \eta_k x^n,$$
$$\Phi_k(x) = \int_0^x \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)};$$

posons:

$$u_0 = \Phi_0(x_0) + \Phi_0(x_1) + \ldots + \Phi_0(x_n),$$
$$u_1 = \Phi_1(x_0) + \Phi_1(x_1) + \ldots + \Phi_1(x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = \Phi_n(x_0) + \Phi_n(x_1) + \ldots + \Phi_n(x_n),$$

et soit:

$$x_0 = \lambda_0(u_0, u_1, \ldots u_n),\ x_1 = \lambda_1(u_0, u_1, \ldots u_n),\ \ldots\ x_n = \lambda_n(u_0, u_1, \ldots u_n),$$

on aura:

$$\Delta(x_0) = \theta_0(x_0)\frac{dx_0}{du_0} + \theta_1(x_0)\frac{dx_0}{du_1} + \theta_2(x_0)\frac{dx_0}{du_2} + \ldots + \theta_n(x_0)\frac{dx_0}{du_n},$$
$$\Delta(x_1) = \theta_0(x_1)\frac{dx_1}{du_0} + \theta_1(x_1)\frac{dx_1}{du_1} + \theta_2(x_1)\frac{dx_1}{du_2} + \ldots + \theta_n(x_1)\frac{dx_1}{du_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta(x_n) = \theta_0(x_n)\frac{dx_n}{du_0} + \theta_1(x_n)\frac{dx_n}{du_1} + \theta_2(x_n)\frac{dx_n}{du_2} + \ldots + \theta_n(x_n)\frac{dx_n}{du_n}.$$

Les fonctions θ étant du degré n, on trouve aussi que les racines de l'équation du n^e degré

$$0 = \theta_0(x)\frac{dx_k}{du_0} + \theta_1(x)\frac{dx_k}{du_1} + \theta_2(x)\frac{dx_k}{du_2} + \ldots + \theta_n(x)\frac{dx_k}{du_n}$$

sont les n fonctions, $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n$.

En cherchant à déterminer directement le degré des équations relatives à la division des arguments dans les fonctions λ, j'ai été conduit à cette remarque, que l'équation algébrique correspondante à l'équation transcendante

$$\Phi(\alpha_0) + \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2) + \ldots + \Phi(\alpha_n) = \mu\Phi(x)$$

a ses coefficients rationnels en x, quel que soit le nombre entier μ; mais voici quelque chose de plus étendu.

Considérez la transcendante $\int_0^x \frac{\theta(x)\partial x}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}}$, où $F(x)$ est un polynome entier du degré m, $\theta(x)$ un autre polynome d'un degré $< m\cdot\frac{k}{n} - 1$. Si l'on suppose

n et m premiers entre eux, et si l'on fait $\nu = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$, on sait que la somme d'un nombre quelconque de pareilles intégrales relatives aux variables x, y, z etc. est réductible à une somme composée de ν termes seulement, dont les arguments α_0, α_1, ... $\alpha_{\nu-1}$ sont déterminées par les racines d'une équation du degré ν, dont les coefficients sont rationnels en x, y, z, ..., $\sqrt[n]{(F(x))}$, $\sqrt[n]{(F(y))}$, $\sqrt[n]{(F(z))}$ etc.

Or, si l'on fait $x = y = z = ...$, l'équation correspondante à l'équation transcendante

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} + \int_0^{\alpha_1} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} + ... + \int_0^{\alpha_{\nu-1}} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} = \mu \int_0^{x} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}}$$

aura tous ses coefficients rationnels en x.

II.

Paris, Août 1844.

La bonté avec laquelle vous avez accueilli mes premières recherches sur les fonctions Abéliennes, m'engage à vous écrire une seconde fois, pour vous soumettre quelques nouveaux résultats auxquels j'ai été conduit par l'étude de vos ouvrages, en essayant d'étendre aux transcendantes plus générales, les principales théories des fonctions elliptiques. Mon travail m'a amené naturellement, à rechercher la démonstration de quelques uns des théorèmes que vous avez énoncés dans le journal de M. *Crelle;* c'est aussi, Monsieur, ce dont je vous demanderai la permission de vous entretenir d'abord; je m'occuperai surtout de l'expression de $\sin\mathrm{am}(u, z)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, si importante pour la théorie des fonctions elliptiques; mais je ne sais si j'aurai véritablement rencontré les principes qui vous ont couduit à ce beau théorème.

En suivant vos notations, je nommerai $H(x)$, $\Theta(x)$ les deux fonctions qui donnent

$$\sin\mathrm{am}(x) = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

et qui satisfont aux conditions:

1. $\Theta(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Theta(x)$, $\quad H(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}H(x)$,
   $\Theta(x+2K) = \Theta(x)$, $\quad H(x+2K) = -H(x)$;

et voici d'abord une remarque sur laquelle je me fonderai principalement.

Soit $\Phi(x)$ une fonction définie par l'équation

$$2. \quad \Phi(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x)$$

et par la condition de périodicité

$$3. \quad \Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

on trouvera qu'en supposant

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

les coefficients se déterminent de la manière suivante:

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu a_0 q^{\mu^2}, \quad a_{2\mu+1} = (-1)^\mu a_1 q^{\mu(\mu+1)},$$

de sorte qu'en employant les fonctions H et Θ, on a

$$\Phi(x) = AH(x) + B\Theta(x).$$

Cela posé, soit n un nombre premier, p un entier compris entre 0 et $n-1$, faisons $\alpha = e^{-p\frac{8i\pi}{n}}$ et considérons la somme

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)} + \alpha\frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)} + \alpha^2\frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)} + \ldots + \alpha^{(n-1)}\frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)};$$

nommons $\Phi(x)$ le numérateur et $\Phi_0(x)$ le dénominateur, savoir:

$$\Phi_0(x) = \Theta(x)\Theta(x)\left(x+\frac{4K}{n}\right)\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)\ldots\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right):$$

on déduit sans peine de la propriété fondamentale des Θ, qui est exprimée par l'égalité (1), la condition

$$\Phi_0(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi_0(x),$$

et il est clair qu'on a

$$\Phi_0\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi_0(x).$$

Or ces deux équations peuvent être ramenées aux équations (2) et (3), de la manière suivante. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie par les deux conditions

$$\varphi(x+2iK_1') = -e^{-\frac{i\pi}{K_1}(x+iK_1')}\varphi(x) \text{ et } \varphi(x+4K_1) = \varphi(x):$$

on aura d'après ce qui a été dit tout-à-l'heure: $\varphi(x) = AH_1(x) + B\Theta_1(x)$, en désignant par H_1 et Θ_1 les fonctions H et Θ, dans lesquelles K et K' seraient supposés devenus K_1 et K_1'; posons ensuite $n\frac{K_1}{K} = \frac{K_1'}{K'}$, et faisons $x = \frac{nK_1}{K}\cdot z$, il viendra, comme on le voit facilement:

$$\varphi\Big(\frac{nK_1}{K}(z+2iK')\Big) = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(z+2iK')}\varphi\Big(\frac{nK_1}{K}z\Big) \text{ et}$$

$$\varphi\Big(\frac{nK_1}{K}\Big(z+\frac{4K}{n}\Big)\Big) = \varphi\Big(\frac{nK_1}{K}z\Big).$$

Or ces équations font voir qu'on aura

$$\Phi_0(x) = \varphi\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big) = AH_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big) + B\Theta_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big),$$

et comme la fonction Φ_0 est paire, il faut faire $A=0$ et il vient:

$$\Phi_0(x) = \text{Const.}\,\Theta_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big).$$

Je passe actuellement au numérateur désigné par $\Phi(x)$. On établit immédiatement, qu'il satisfait encore à l'équation

$$4. \qquad \Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+2iK')}\Phi(x),$$

et on peut même observer que chacun des n produits dont la somme le compose, la vérifie isolément. On trouve ensuite en désignant par j un nombre entier:

$$\Phi\Big(x+\frac{4jK}{n}\Big) = \alpha^{-j}\Phi(x).$$

Si donc je pose

$$\Psi(x) = e^{-2p\frac{i\pi x}{K}}\Phi(x),$$

j'aurai:

$$\Psi\Big(x+\frac{4jK}{n}\Big) = \Psi(x).$$

D'ailleurs de l'équation fondamentale (4) on tirera:

$$\Psi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+2iK')+4p\frac{\pi K'}{K}}\Psi(x),$$

et en mettant $x-4p\frac{iK'}{n}$ à la place de x, et faisant pour plus de clarté

$$\Psi_1(x) = \Psi\Big(x-\frac{4piK'}{n}\Big),$$

on en déduit:

$$\Psi_1(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Psi_1(x).$$

Ainsi par cette transformation nous sommes entièrement ramenés à l'équation (4). Mais on a la condition de périodicité:

$$\Psi_1\Big(x+\frac{4K}{n}\Big) = \Psi_1(x),$$

donc, en raisonnant comme plus haut, il viendra:

$$\Psi_1(x) = AH_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big) + B\Theta_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big).$$

Faisons pour la suite $\frac{nK_1}{K} = \frac{1}{M}$, nous aurons le théorème exprimé par l'égalité:

$$\sin\mathrm{am}(x) + \alpha\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{4K}{n}\Big) + \alpha^2\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{8K}{n}\Big) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{4(n-1)K}{n}\Big)$$
$$= e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\cdot\frac{AH_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)+B\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)}{\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)}.$$

J'observe que le premier membre change de signe en augmentant x de $2K$; le nombre n étant impair, il en est de même de la fonction $H_1\Big(\frac{x}{M}\Big)$; d'ailleurs $\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)$ ne change pas; ainsi il faut faire $B=0$, et il vient:

$$\sin\mathrm{am}(x) + \alpha\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{4K}{n}\Big) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{4(n-1)K}{n}\Big)$$
$$= \mathrm{Const.}\, e^{2p\frac{ipx}{K}}\cdot\frac{H_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)}{\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)}$$
$$= \mathrm{Const.}\,\sin\mathrm{am}\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)\cdot\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK_1}{n}\Big)}{\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)}.$$

Je substitue maintenant aux fonctions Θ à période réelle, les fonctions analogues $\vartheta(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x)$, à la période imaginaire $4iK'$; on trouve:

$$\vartheta_1\Big(\frac{x}{M}\Big) = e^{n\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big),$$

de sorte qu'à un facteur constant près, l'expression $\dfrac{e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)}{\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)}$ se transforme en la suivante: $\dfrac{\vartheta_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)}{\vartheta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)}$, où l'exponentielle $e^{2p\frac{i\pi x}{K}}$ a disparu; ainsi il vient:

$$\sin\mathrm{am}(x) + \alpha\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{4K}{n}\Big) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\Big(x+\frac{4(n-1)K}{n}\Big)$$
$$= \mathrm{Const.}\,\sin\mathrm{am}\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)\cdot\frac{\vartheta_1\Big(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\Big)}{\vartheta_1\Big(\frac{x}{M}\Big)}.$$

Pour déterminer la constante, je multiplie les deux membres par $x - iK'$, puis je fais $x = iK'$; en nommant $\varkappa$, $\varkappa_1$ les modules des fonctions K, K_1, le terme $\sin\mathrm{am}(x)$ qu'il y a seul lieu de considérer dans le premier membre, donne $\frac{1}{\varkappa}$: dans le second il suffit d'avoir la valeur de la dérivée de $\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)$, pour $x = iK'$. Or on obtient sans peine pour résultat: $\frac{i\sqrt{\varkappa_1}.\vartheta_1(0)}{M}$: ainsi on a l'égalité

$$\frac{1}{\varkappa} = \text{Const.}\sin\mathrm{am}\left(\frac{iK'}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right).\frac{\vartheta_1\left(\frac{iK'}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\frac{1}{M}.i\sqrt{\varkappa_1}.\vartheta_1(0)},$$

et on en tire après quelques transformations faciles:

$$\text{Const.} = \frac{\varkappa_1}{M\varkappa}.\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_1\left(\frac{4piK'_1}{n}\right)}.$$

Nous voici de la sorte parvenus au théorème exprimé par l'égalité:

$$\frac{M\varkappa}{\varkappa_1}\left(\sin\mathrm{am}(x) + \alpha\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)\right)$$

$$= \sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right).\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)}.$$

Je n'ai plus maintenant, qu'à vous emprunter, Monsieur, la méthode par laquelle vous établissez les propriétés si remarquables de la fonction

$$\chi(u) = e^{ru^2}\Omega(u).$$

En formant le produit

$$\psi(x) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{4iK'_1}{n}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{8iK'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{4(n-1)iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_0(0)\,\vartheta_1^2\left(\frac{4iK'_1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{8iK'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{2(n-1)iK'_1}{n}\right)},$$

on aura $\psi\left(x + 4p\frac{iK'}{n}\right) = \psi(x)$, et on en déduit la formule suivante:

$$\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)} =$$

$$\left\{\frac{\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)}{\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

de laquelle découle ainsi la démonstration de votre théorème sur l'expression algébrique de $\sin\mathrm{am}(x)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}\right)$.

La méthode précédente est fondée principalement, sur ce caractère digne de toute notre attention, de la fonction $\sin\mathrm{am}(x)$, d'être exprimable par le quotient de deux fonctions développables en séries, toujours convergentes, et qui restent les mêmes, ou ne font qu'acquérir un facteur commun, en augmentant l'argument de certaines quantités constantes. Tel est le lien si simple, par lequel se trouve rattaché aux notions analytiques élémentaires, l'ensemble des propriétés caractéristiques de la nouvelle transcendante, qui ont leur source dans le principe de la double période. Mais il est important d'abord d'observer dans toute fonction rationnelle de $\sin\mathrm{am}(x)$, l'analogie des fonctions qui jouent les rôles de numérateur et de dénominateur, avec les fonctions H et Θ. A cet effet, je considère la fonction homogène d'un degré quelconque n:

$$\Phi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}\Theta(x) + \ldots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x).$$

On trouve bien facilement, d'après chaque terme en particulier:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-\frac{ni\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x);$$

on a d'ailleurs:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x);$$

ainsi dans ce cas général, l'expression analytique du caractère de la double périodicité, se présente sous la même forme que pour la fonction $\sin\mathrm{am}(x)$. Introduisons aussi la fonction $H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)$, qui représente le numérateur de la dérivée de $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$; en la désignant un instant par $\chi(x)$, on aura sans peine:

$$\chi(x+2K) = -\chi(x), \qquad \chi(x+2iK') = e^{-2\frac{i\pi}{K}(x+iK)}\chi(x).$$

De là résulte que la fonction suivante:

$$(\alpha.)\quad \Pi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \ldots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x)$$
$$+ (H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x))(A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \ldots + I'\Theta^{n-2}(x))$$

donnera encore

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x).$$

Mais on ne peut pas satisfaire à ces deux équations, par une solution plus générale que la fonction définie par l'équation $(\alpha.)$ qui renferme $2n$ constantes arbitraires. Supposons en effet:

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

la seconde équation donnera facilement:

$$a_{m+2n} = (-1)^n a_m q^{m+n},$$

d'où:

$$a_{m+2kn} = (-1)^{kn} a_m q^{km+k^2 n},$$

k étant un nombre entier positif ou négatif. On voit par là, que tous les coefficients s'obtiendront au moyen des quantités $a_0, a_1, \ldots a_{2n-1}$ qui restent arbitraires. Si à la condition $\Pi(x+4K) = \Pi(x)$, on substitue la condition plus particulière $\Pi(x+2K) = -\Pi(x)$, tous les coefficients à indices pairs devront être nuls, ce qui réduira à moitié le nombre des constantes arbitraires.

Ainsi je considère l'expression

$$\sin\mathrm{am}(x).F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d.\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f(\sin^2\mathrm{am}(x)),$$

où $F(x)$ et $f(x)$ désignent deux fonctions entières, l'une du degré m, l'autre du degré $m-1$; je remplace $\sin\mathrm{am}(x)$ par $\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)}$, le numérateur

$$\Pi(x) = \Theta(x)^{2m+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)} \cdot F\left(\frac{1}{z} \cdot \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} f\left(\frac{1}{z} \cdot \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right\}$$

vérifiera les deux équations:

$$\Pi(x+2K) = -\Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK) = -e^{-(2m+1)\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x)$$

indépendamment des valeurs des coefficients au nombre de $2m+1$ qu'il renferme; il en représentera donc la solution la plus générale. Mais d'une autre part, je considère le produit des $2m+1$ facteurs

$$H(x+a_1).H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m}).H(x+a_{2m+1}):$$

il satisfait évidemment à la première des équations précédentes, et on voit sans peine qu'il vérifiera la seconde, en assujettissant les constantes $a_1, a_2, \ldots. a_{2m}, a_{2m+1}$, à la seule condition

$$a_1 + a_2 + \ldots. + a_{2m} + a_{2m+1} = 2jK,$$

j étant un nombre entier quelconque. En introduisant un facteur constant, on aura une nouvelle expression de la solution générale, dont la comparaison avec la première, donne le théorème exprimé par l'égalité:

$$\sin\mathrm{am}(x)\,F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d.\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f(\sin^2\mathrm{am}(x))$$
$$= \mathrm{Const.}\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

Ainsi nous obtenons sous la forme trouvée par Abel, les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques relatives à l'addition des arguments.

Dans le cas le plus simple, celui de $m = 1$, on aura:

$$\sin\mathrm{am}\,x\,(\sin^2\mathrm{am}\,(x) + A) - B\frac{d.\sin\mathrm{am}\,(x)}{dx} = \text{Const.}\frac{H(x+a_1)\,H(x+a_2)\,H(x-a_1-a_2)}{\Theta^3(x)}.$$

Les coefficients A, B dépendent des quantités a_1 et a_2, au moyen des deux équations qui expriment que le premier membre s'annule pour $x = -a_1$, $x = -a_2$.

Si l'on suppose $a_1 = -a_2$, on trouvera

$$B = 0, \qquad A = -\sin^2\mathrm{am}\,(a_1),$$

ce qui donnera:

$$\sin\mathrm{am}\,(x)\,(\sin^2\mathrm{am}\,(x) - \sin^2\mathrm{am}\,(a_1)) = \text{Const.}\frac{H(x)\,H(x+a_1)\,H(x-a_1)}{\Theta^3(x)};$$

et par suite:

$$\sin^2\mathrm{am}\,(x) - \sin^2\mathrm{am}\,(a_1) = \text{Const.}\frac{H(x+a_1)\,H(x-a_1)}{\Theta^2(x)},$$

$$\log(\sin^2\mathrm{am}(x) - \sin^2\mathrm{am}(a_1)) = \text{const.} + \log H(x+a_1) + \log H(x-a_1) - 2\log\Theta(x).$$

Cette dernière équation conduit à la théorie des fonctions de 3me espèce, en différentiant par rapport à a_1, et intégrant par rapport à x.

Mais je reprends les deux équations

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

dont la solution générale est donnée par l'expression

$$\Pi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \ldots + I\Theta^n(x)$$
$$+ (H^1(x)\Theta(x) - H(x)\Theta^1(x))(A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \ldots + I'\Theta^{n-2}(x)).$$

En faisant $\alpha = e^{-p\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$\Phi(x) = \Pi(x) + \alpha\Pi\left(x+\frac{4K}{n}\right) + \alpha^2\Pi\left(x+\frac{8K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\Pi\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

on aura toujours la seconde équation:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x),$$

mais de plus:

$$\Phi\left(x+\frac{4jK}{n}\right) = \alpha^{-j}\Phi(x).$$

Posant donc

$$\Psi(x) = e^{-p\frac{i\pi x}{2K}}\Phi(x),$$

il viendra:

$$\Psi\Big(x+\frac{4K}{n}\Big)=\Psi(x),\qquad \Psi(x+2iK')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')+p\frac{\pi K'}{K}}\Psi(x).$$

Je mets à la place du facteur $(-1)^n$, $e^{ni\pi}$, et je fais

$$\Psi_1(x)=\Psi\Big(x+\frac{(n-1)K}{n}-\frac{p}{n}iK'\Big);$$

j'obtiendrai par là les deux équations

$$\Psi_1\Big(x+\frac{4K}{n}\Big)=\Psi_1(x),\qquad \Psi_1(x+2iK')=-e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Psi_1(x).$$

On aurait pu faire plus généralement:

$$\Psi_1(x)=\Psi\Big(x+\frac{(n-\nu)K}{n}-p\frac{iK'}{n}\Big),$$

ν désignant un nombre impair quelconque, et on serait arrivé aux mêmes conditions. En faisant

$$\frac{1}{M}=\frac{nK_1}{K},$$

on trouvera, comme je l'ai déjà établi, que le nombre n soit impair ou pair:

$$\Psi_1(x)=aH_1\Big(\frac{x}{M}\Big)+b\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big).$$

Nous voici donc parvenus au théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$\Pi(x)+\alpha\Pi\Big(x+\frac{4K}{n}\Big)+\alpha^2\Pi\Big(x+\frac{8K}{n}\Big)+\ldots.+\alpha^{n-1}\Pi\Big(x+\frac{4(n-1)K}{n}\Big)$$
$$=e^{p\frac{i\pi x}{2K}}\Big\{aH_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)+b\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)\Big\}.$$

Sans m'arrêter à la détermination des constantes a, b, il est clair qu'en remplaçant α successivement par toutes les racines de l'équation binome $x^n=1$, ou en faisant $p=0, 1, 2, \ldots. n-1$, on aura un système de n équations linéaires qui donneront:

$$\Pi(x)=\sum_0^{n-1}{}_p e^{p\frac{i\pi x}{2K}}\Big\{a_pH_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)+b_p\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)\Big\}.$$

Cette nouvelle expression de la fonction $\Pi(x)$, conduit au développement en série de toute fonction rationnelle de $\sin\mathrm{am}(x)$ et de sa dérivée. (J'ai remarqué à ce sujet, qu'en cherchant le développement de la fonction

$$\vartheta(x)=e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x),$$

d'après celui de

$$\Theta(x)=1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi x}{K}-\ldots.=1+\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\Big\{e^{\frac{n\pi}{K}(ix-nK')}+e^{-\frac{n\pi}{K}(ix+nK')}\Big\},$$

on arrivait au résultat suivant:

$$\vartheta(x) = e^{\frac{\pi}{4KK'}x^2} + \sum_1^\infty{}_n(-1)^n\left\{e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2niK')^2} + e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-2niK')^2}\right\}.$$

La fonction $e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}H(x)$ donne de même:

$$\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\left\{e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+(2n+1)iK')^2} - e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-(2n+1)iK')^2}\right\}.)$$

La théorie de la transformation découle bien simplement des mêmes principes. Considérez en effet, la somme ou la somme des produits deux à deux, trois à trois etc., ou le produit des n fonctions (n étant impair):

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)}\cdot\frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)}\cdot\frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}.$$

Soit $\Phi_1(x)$ le numérateur, $\Phi_0(x)$ le dénominateur: pour l'une et pour l'autre de ces deux fonctions on trouve les conditions:

$$\Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x), \qquad \Phi\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi(x),$$

desquelles il résulte

$$\Phi_1(x) = A_1H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_1\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right),$$

$$\Phi_0(x) = A_0H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_0\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Or la fonction $\Phi_1(x)$ sera paire ou impaire selon qu'elle sera relative à une somme de produits d'un nombre pair ou d'un nombre impair de fonctions. Dans le premier cas, on devra faire $A_1 = 0$, dans le second, $B_1 = 0$; d'ailleurs pour $\Phi_0(x)$ on a toujours $A_0 = 0$. De là résulte que la somme des produits 2 à 2, 4 à 4, ... $n-1$ à $n-1$ des quantités

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad \frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)},$$

est constante, et qu'elles peuvent être considérées comme les racines d'une équation du n^{me} degré, dont les coefficients sont des fonctions du premier degré de $\dfrac{H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}{\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}$. On en conclut l'expression connue de cette dernière fonction,

par une fonction rationnelle de l'une quelconque des quantités précédentes etc. Toutes ces propriétés spéciales à la fonction à double pèriode $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$, découlent immédiatement, comme on le voit, de l'équation de définition des fonctions H et Θ simplement périodiques; on peut même remarquer la grande extension que reçoit le dévoloppement en produit infini de $\sin\mathrm{am}(x)$, qui a été obtenu la première fois comme conséquence des formules de transformation, au moyen de l'égalité obtenue plus haut, savoir:

$$\sin\mathrm{am}(x)\,F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d\cdot\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f(\sin^2\mathrm{am}(x))$$
$$= \text{Const.}\,\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

Jusqu'à présent, je n'ose point encore espérer, Monsieur, d'appliquer avec succès la méthode précédente à l'analyse des fonctions de deux variables à quatre périodes simultanées; ce sera donc sous un autre point de vue, que je vais essayer de lier en quelques points, par des résultats analogues, la théorie des fonctions Abéliennes et des fonctions elliptiques. Ainsi je prendrai les fonctions de 3me espèce, et sous la forme suivante:

$$\int\Big\{\Big(\frac{\Delta(a)}{x-a}+\frac{\Delta(b)}{x-b}\Big)\cdot\frac{dx}{\Delta x}+\Big(\frac{\Delta a}{y-a}+\frac{\Delta b}{y-b}\Big)\cdot\frac{dy}{\Delta y}\Big\};$$

l'intégrale étant assujéttie à s'évanouir, lorsqu'on fait à la fois $x=0$, $y=0$, Δx représentant la racine carrée du polynome $p_1x^1+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4+p_5x^5$. Je la désignerai par $\Pi(u, v, \alpha, \beta)$, lorsqu'on y aura fait les substitutions $x=\lambda_0(u, v)$, $y=\lambda_1(u, v)$, les nouvelles variables u et v étant comme à l'ordinaire:

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{dy}{\Delta y},\quad v=\int_0^x\frac{x\,dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{y\,dy}{\Delta y},$$

et de même $a=\lambda_0(\alpha, \beta)$, $b=\lambda_1(\alpha, \beta)$. On aura alors les expressions suivantes des coefficients différentiels:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\Pi}{du}=\Delta u\cdot\frac{x+y-a}{(a-x)(a-y)}+\Delta b\cdot\frac{x+y-b}{(b-x)(b-y)},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\Pi}{dv}=-\frac{\Delta a}{(a-x)(a-y)}-\frac{\Delta b}{(b-x)(b-y)}.$$

J'introduirai pareillement les variables u et v dans les fonctions de seconde espèce, savoir:

$$\int\Big(\frac{x^2dx}{\Delta x}+\frac{y^2dy}{\Delta y}\Big)\text{ et: }\int\Big(\frac{x^3dx}{\Delta x}+\frac{y^3dy}{\Delta y}\Big);$$

elles deviendront respectivement:

$$\int((\lambda_0+\lambda_1)dv-\lambda_0\lambda_1 du),\quad \int((\lambda_0^2+\lambda_0\lambda_1+\lambda_1^2)dv-(\lambda_0+\lambda_1)du).$$

Cela posé, la première étant désignée pour un instant par $(u,v)_1$, et la seconde par $(u,v)_2$, je ferai

$$E_1(u,v) = 2p_4(u,v)_1+3p_5(u,v)_2 \quad \text{et} \quad E_2(u,v) = p_5(u,v)_2;$$

on aura alors le théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$1.\quad \Pi(u,v,\alpha,\beta)-\Pi(\alpha,\beta,u,v)$$
$$= p_3(\alpha v-\beta u)+\alpha E_1(u,v)+\beta E_2(u,v)-uE_1(\alpha,\beta)-vE_2(\alpha,\beta),$$

de laquelle se tirent les valeurs des fonctions complètes. Prenons en effet pour u et v deux demi-périodes simultanées i, j, les valeurs correspondantes de x et y donneront $\Delta(x)=0$, $\Delta(y)=0$; ainsi l'on aura:

$$\Pi(i,j,\alpha,\beta) = p_3(\alpha j-\beta i)+\alpha E_1(i,j)+\beta E_2(i,j)-iE_1(\alpha,\beta)-jE_2(\alpha,\beta).$$

On remarque sur cette expression un singulier genre de discontinuité de la fonction Π. En effet, les arguments u, v, étant quelconques, il est hors de doute qu'on peut, sans altérer sa valeur, ajouter les périodes simultanées aux arguments α, β; mais si l'on suppose $u=i$, $v=j$, la fonction deviendra uniquement périodique pour ces indices; c'est ce qu'on vérifie aisément sur la valeur précédente.

L'égalité (1) peut être transformée en une autre plus simple. Posons

$$Z_1(u,v) = E_1(u,v)-Au-Bv,\quad Z_2(u,v) = E_2(u,v)-A'u-B'v$$

et déterminons A, B, A', B', par les conditions

$$Ai+Bj = E_1(i,j),\quad Ai'+Bj' = E(i',j'),$$
$$A'i+B'j = E_2(i,j),\quad A'i'+B'j' = E_2(i',j'),$$

i', j' désignant deux autres demi-périodes simultanées. Faisons en outre

$$\Phi(u,v,\alpha,\beta) = \Pi(u,v,\alpha,\beta)+uZ_1(\alpha,\beta)+vZ_2(\alpha,\beta)-c(\alpha v-\beta u),$$

c étant une constante dont la valeur est $c=p_2+B-A'$, il viendra:

$$2.\quad \Phi(u,v,\alpha,\beta)-\Phi(\alpha,\beta,u,v) = -c(\alpha v-\beta u).$$

Dans le théorème exprimé par cette égalité, la fonction Φ, comme il aisé de le voir, jouira de la propriété que

$$\Phi(u+2i,v+2j,\alpha,\beta)=\Phi(u,v,\alpha,\beta),\quad \Phi(u+2i',v+2j',\alpha,\beta)=\Phi(u,v,\alpha,\beta);$$

ainsi on obtiendrait une fonction séparément périodique en u et en v, en prenant

$$\Psi(u,v,\alpha,\beta) = \Phi\Big(\frac{iu+i'v}{\pi},\frac{ju+j'v}{\pi},\alpha,\beta\Big).$$

Peut-être cela conduira-t-il à un développement de la fonction Ψ de la forme $\Sigma a_{m,n}e^{\sqrt{-1}(mu+nv)}$. J'ai remarqué à ce sujet que, le théorème d'*Abel*, permet-

tant d'exprimer algébriquement

$$\lambda_0\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}\right),$$

au moyen de

$$\lambda_0\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right), \lambda_1\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right) \text{ et } \lambda_0\left(\frac{i'u}{\pi}, \frac{j'u}{\pi}\right), \lambda_1\left(\frac{i'u}{\pi}, \frac{j'u}{\pi}\right),$$

on obtenait un nouveau genre de réduction des fonctions de deux variables à des fonctions algébriques de fonctions d'une variable, parfaitement analogue à celui que vous m'avez fait, Monsieur, l'honneur de m'écrire; mais ce cas particulier, auquel j'ai été ainsi amené, ne m'a point semblé moins difficile à traiter que le cas général.

Quoiqu'il en soit, le théorème d'*Abel* donnera pour l'addition des arguments dans la fonction Π, l'égalité:

$$\Pi(u+u', v+v', \alpha, \beta) = \Pi(u, v, \alpha, \beta) + \Pi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

et on aura de même:

$$3.\ \Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta) + \Phi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta).$$

L'égalité (2), au moyen de laquelle on peut faire l'échange simultané des arguments u, v et α, β, nous donnera le théorème correspondant:

$$\Phi(\alpha, \beta, u+u', v+v') = \Phi(\alpha, \beta, u, v) + \Phi(\alpha, \beta, u', v') + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

auquel on pourrait arriver aussi par une voie directe. Cela posé, je mets dans l'équation (3), à la place de u, u', v, v', respectivement, $i+u$, $i+u'$, $j+v$, $j+v'$; il viendra:

$$\Phi(u+u'+2i, v+v'+2j, \alpha, \beta)$$
$$= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta) + \Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta) + \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta),$$

ou bien:

$$\Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta)$$
$$= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta) + \Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta) + \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta).$$

Cela étant, je fais: $\alpha = u-u'$, $\beta = v-v'$, ce qui donne:

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')$$
$$= \Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v') + \Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v')$$
$$+ \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, u-u', v-v').$$

Je change ensuite, u', v' en $-u'$, $-v'$. Comme la fonction Φ change de signe avec les deux arguments u, v, le terme $\Phi(-u'+i, -v'+j, \ldots)$ pourra s'écrire $-\Phi(u'-i, v'-j, \ldots)$; et en ajoutant aux deux premiers arguments leurs périodes $2i$, $2j$, $-\Phi(u'+i, v'+j, \ldots)$, de sorte qu'il viendra

$$\Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')$$
$$= \Phi(u+i, v+j, u+u', v+v') + \Phi(u'+i, v'+j, u+u', v+v')$$
$$+ \log f(u+i, v+j, i-u', j-v', u+u', v+v').$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, et développant dans le second membre par le théorème sur l'addition des deux derniers arguments, il viendra:

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v') + \Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')$$
$$= 2\Phi(u+i, v+j, u, v) - 2\Phi(u'+i, v'+j, u', v') + \text{fonct. log}^e.$$

Enfin, si l'on applique au premier membre le théorème

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v - \beta u),$$

on obtiendra l'égalité

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')$$
$$= \Phi(u+i, v+j, u, v) - \Phi(u'+i, v'+j, u', v') + c(uv'-u'v) + \text{une fonct. log}^e,$$

par laquelle la réduction des fonctions elliptiques de 3me espèce est étendue aux fonctions Abéliennes.

Mais j'ai entrevu un autre genre de démonstration, fondé sur des considérations toutes différentes, et dont je vais essayer de donner l'idée en l'appliquant aux fonctions elliptiques.

Soit, comme à l'ordinaire:

$$\Delta(x) = \sqrt{((1-x^2)(1-z^2x^2))};$$

posons

$$z = \int_0^x \frac{\Delta a \cdot dx}{(x-a)\Delta(x)},$$

on trouvera facilement:

$$\Delta(a)\cdot\frac{dz}{da} = z^2\int_0^x \frac{x^2-a^2}{\Delta(x)}dx - \frac{\Delta(x)}{x-a} - \frac{1}{a},$$

et en différentiant de nouveau par rapport à a:

$$\frac{d\left(\Delta a\frac{dz}{da}\right)}{da} = -2az^2\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} - \frac{\Delta(x)}{(x-a)^2} + \frac{1}{a^2}.$$

D'ailleurs on a immédiatement:

$$\Delta(x)\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta(a)}{x-a}, \qquad \frac{d\left(\Delta(x)\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = -\frac{\Delta(a)}{(x-a)^2};$$

on en conclut cette équation:

$$\frac{d\left(\Delta(a)\frac{dz}{da}\right)}{da}\cdot\Delta(a) = \frac{d\left(\Delta(x)\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\Delta(x) - 2az^2\Delta(a)\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{\Delta(a)}{a^2}.$$

En prenant pour variables indépendantes les arguments ξ et α des fonctions

$$x = \sin\mathrm{am}(\xi), \qquad a = \sin\mathrm{am}(\alpha),$$

et mettant $\Delta(\mathrm{am}(\alpha))$ au lieu de $\Delta(\sin\mathrm{am}(\alpha))$, il viendra:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{d^2z}{d\xi^2} - 2z^2\xi\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta(\mathrm{am}(\alpha)) + \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin^2\mathrm{am}(\alpha)}.$$

Soit

$$E(\alpha) = \int_0^{\alpha}\sin^2\mathrm{am}(\alpha)\,d\alpha \quad \text{et} \quad z = -z^2\xi E(\alpha) - \int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)} + u;$$

on aura

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}, \quad \text{donc} \quad u = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).$$

Considérons donc l'égalité:

$$u = \int_0^{\xi}\frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))\,d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)} - z^2\xi E(\alpha) + \int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).$$

En faisant $\xi = 0$, on a

$$F(\alpha) + f(\alpha) = \int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)};$$

on trouverait de même pour $\alpha = 0$,

$$F(\xi) + f(-\xi) = \int\frac{d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)},$$

donc

$$F(\alpha) + f(\alpha) = F(\alpha) + f(-\alpha) \quad \text{ou} \quad f(\alpha) = f(-\alpha).$$

Je m'arrête un instant à cette remarque; car, sans aller plus loin, on peut tirer de là, les théorèmes fondamentaux des fonctions elliptiques. En effet, en différentiant par rapport à ξ, il vient:

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)} - z^2E(\alpha) = F'(\alpha+\xi) - f'(\alpha-\xi).$$

Faisant successivement, $\xi = x+a$, $\xi = x-a$, et retranchant on obtient l'égalité

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}$$
$$= F'(\alpha+x+a) - F'(\alpha+x-a) - f'(\alpha-x-a) + f'(\alpha-x+a).$$

Or la fonction $f'(x)$ étant impaire, on voit immédiatement que le second membre est symétrique par rapport à x et α; on aura donc:

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha)}$$
$$= \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(\alpha+a)-\sin\mathrm{am}(x)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(\alpha-a)-\sin\mathrm{am}(x)}.$$

De là se tire le théorème d'*Euler* sur l'addition des fonctions elliptiques. Soit en effet $\alpha = 0$, on aura:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)} - \frac{1}{\sin\mathrm{am}(x-a)}$$

$$= \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(a)-\sin\mathrm{am}(x)} + \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(a)+\sin\mathrm{am}(x)} = \frac{2\sin\mathrm{am}(a)\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin^2\mathrm{am}(a)-\sin^2\mathrm{am}(x)};$$

et permutant x et a:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)} + \frac{1}{\sin\mathrm{am}(x-a)} = \frac{2\sin\mathrm{am}(x)\Delta(\mathrm{am}(a))}{\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a)};$$

donc, en ajoutant membre à membre:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)} = \frac{\sin\mathrm{am}(x)\Delta(\mathrm{am}(a)) - \sin\mathrm{am}(a)\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a)};$$

ce qui se ramène sans difficulté à la formule connue. De la même source on tire encore le théorème sur l'addition des arguments dans la fonction de 3me espèce, en opérant ainsi que je l'ai fait dans une lettre adressée à M. *Liouville*, imprimée déjà dans les Comptes-rendus, et qui paraîtra de nouveau dans le prochain numéro du journal de mathématiques. Il ne serait pas difficile d'arriver à la forme que vous prenez ordinairement, Monsieur, pour les fonctions de troisième espèce; il suffirait pour cela de partir de la formule suivante, qu'on démontrerait comme précédemment; savoir, i étant une quelconque des quantités qui donnent $\sin\mathrm{am}(u+i) = \sin\mathrm{am}(u-i)$:

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha+i))}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha+i)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha+i))}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha+i)}$$

$$= \frac{\Delta(\mathrm{am}(x+i))}{\sin\mathrm{am}(\alpha+a)-\sin\mathrm{am}(x+i)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(x+i))}{\sin\mathrm{am}(\alpha-a)-\sin\mathrm{am}(x+i)},$$

et de prendre i tel, que $\frac{1}{\sin\mathrm{am}(i)} = 0$.

Mais je reviens à l'égalité:

$$\int_0^{\xi} \frac{\Delta(\mathrm{am}\alpha)\cdot d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)} - z^2\xi E(\alpha) + \int \frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

Changeons α en $-\alpha$, puis retranchons membre à membre, il viendra:

$$\int_0^{\xi} \frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta(\mathrm{am}(\alpha))\cdot d\xi}{\sin^2\mathrm{am}(\xi)-\sin^2\mathrm{am}(\alpha)} - 2z^2\xi E(\alpha) = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)-F(\xi-\alpha)-f(-\xi-\alpha).$$

Le second membre pourra encore évidemment être représenté par $F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)$, et puisque le premier s'annule pour $\xi = 0$, et $\alpha = 0$, par $F(\xi+\alpha)-F(\xi-\alpha)$, F étant une fonction paire. Pour la déterminer, différentions par rapport à ξ;

puis faisons $\xi = 0$, il viendra:

$$2F'(\alpha) = -\frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta\mathrm{am}(\alpha)}{\sin^2\mathrm{am}(\alpha)} - 2\varkappa^2 E(\alpha),$$

d'où, en posant $Z(\alpha) = \int E(\alpha)\,d\alpha$:

$$F(\alpha) = -\tfrac{1}{2}\log\sin^2\mathrm{am}(\alpha) - \varkappa^2 Z(\alpha);$$

il vient donc cette égalité:

$$\int_0^{\xi} \frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta\mathrm{am}(\alpha)\cdot d\xi}{\sin^2\mathrm{am}(\xi) - \sin^2\mathrm{am}(\alpha)}$$
$$= 2\varkappa^2\xi E(\alpha) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\mathrm{am}(\xi-\alpha)}{\sin^2\mathrm{am}(\xi+\alpha)} + \varkappa^2\big(Z(\xi-\alpha) - Z(\xi+\alpha)\big),$$

de laquelle se conclut sans peine tout le reste de cette recherche.

28.

Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

1. „Durch jeden Punct D einer Ellipse gehen drei Krümmungskreise der letztern, welche sie in irgend drei andern Puncten A, B, C osculiren; und jedesmal liegen die vier Puncte A, B, C, D in einem Kreise." Dieser Satz ist gewissermaafsen ein besonderer Fall von dem folgenden Satze.

2. I. Werden in einer Curve 3ter Ordnung drei beliebige Puncte A, B, C angenommen, so gehen durch dieselben, im Allgemeinen, 9 Kegelschnitte K, wovon jeder die Curve in irgend einem andern Puncte osculirt; von diesen 9 Osculationspuncten sind im Allgemeinen drei reell und sechs imaginär, demgemäfs sie durch $3R$ und $6I$ bezeichnet werden mögen; Diesem entsprechend sind auch von den 9 Kegelschnitten K drei reell und sechs imaginär.

Von den 9 Osculationspuncten, $3R+6I$, liegen 12mal 3 mit den drei Puncten A, B, C zusammen in einem Kegelschnitte K_1; von diesen 12 Kegelschnitten K_1 sind 4 reell und 8 imaginär; nach einer gewissen Beziehung gruppiren sie sich zu 3 und 3 in vier Systeme, wovon jedes einen reellen und zwei imaginäre K_1 enthält, und wobei die $3K_1$ jedes Systems zusammen durch alle 9 Puncte R und I gehen, so dafs keiner von diesen in zwei von jenen liegt; bei dem einen System geht der reelle K_1 durch die $3R$, und die $6I$ liegen, zu 3 und 3, in den zwei imaginären K_1; bei den drei andern Systemen gehen die reellen K_1 einzeln durch die Puncte $3R$, und durch 2 und 2 der Puncte $6I$. Durch jeden der 9 Puncte R, I gehen vier Kegelschnitte K_1 *).

*) Es finden noch weitere Eigenschaften Statt; z. B.: Die 9 Kegelschnitte K gruppiren sich zu drei in 12 Systeme, entsprechend dem Umstande, wie ihre Osculationspuncte R, I zu drei und drei in den 12 Kegelschnitten K_1 liegen. Die $3K$ jedes Systems schneiden einander (aufser in A, B, C) paarweise in 3 Puncten X, so dafs 12mal $3X$, oder im Ganzen $36X$ entstehen. Die $12K_1$ wurden oben, zu 3 und 3, in vier Systeme geordnet: die $3K_1$ jedes Systems schneiden einander ebenso paarweise in 3 Puncten Y; was im Ganzen 12 Puncte Y giebt. Nun lassen sich ferner durch jeden der 9 Puncte R, I und durch die 3 Puncte A, B, C drei neue Kegelschnitte L legen, von denen jeder die Curve C_3 in irgend einem andern Puncte Z berührt (was zusammen 27 Kegelschnitte

II. Durch die beliebig angenommenen 3 Puncte A, B, C sind die 9 Puncte R, I bestimmt; auch sind durch jeden der letztern die 8 übrigen, aber nicht jene drei bestimmt. Nämlich von den drei Puncten A, B, C können zwei, oder alle drei, ihre Lage gleichzeitig ändern, während die 9 Puncte R, I fest bleiben; ändert dagegen blofs einer von jenen seine Lage, so ändern sich auch die letztern alle. Folgende Angaben werden dies klarer und übersichtlicher machen. Der Einfachheit wegen wollen wir uns dabei zunächst blofs auf die reellen Puncte $3R$ beschränken und sie zu diesem Zwecke durch R, S, T bezeichnen.

Man ziehe die Gerade BC, die der Curve in einem dritten Puncte D begegnet, und lasse dieselbe sich um diesen festen Punct D herumbewegen; wobei also die zwei andern Schnittpuncte B, C in jedem Momente sich ändern und in neue Schnitte B_0, C_1 übergehen: dann entsprechen den drei Puncten A, B_0, C_1 immer die nämlichen Puncte R, S, T, d. h. es gehen durch A, B_0, C_1 wiederum drei Kegelschnitte K, welche die Curve beziehlich in den Puncten R, S, T osculiren; und immer liegen die 6 Puncte A, B_0, C_1, R, S, T in einem Kegelschnitte K_1. Eben so kann man nun weiter die Gerade AB_0 ziehen und sie um ihren dritten Schnittpunct E mit der Curve herumbewegen, wodurch man statt A, B_0 neue Schnitte A_1, B_1 erhält, und wo alsdann dem System der drei Puncte A_1, B_1, C_1 die nemlichen Puncte R, S, T in gleichem Sinne entsprechen, wie dem ursprünglichen System A, B, C.

Man sieht hieraus, dafs man, um ein neues System von drei Puncten A_1, B_1, C_1 zu haben, welchem die Puncte R, S, T in gleichem Sinne entsprechen, wie den gegebenen Puncten A, B, C, zwei derselben, etwa A_1 und B_1 auf der Curve willkürlich annehmen und dazu den dritten C_1 leicht bestimmen kann.

Alle diese Systeme A, B, C; A_1, B_1, C_1; etc., denen die nämlichen Puncte R, S, T entsprechen, lassen sich auch wie folgt bestimmen und in ihrer Totalität übersehen.

L und 27 Puncte Z giebt), und dann liegen die jedesmaligen 3 Puncte Z wiederum mit A, B, C zusammen in einem Kegelschnitte L_1, so dafs jedem der 9 Puncte R, I ein solcher Kegelschnitt L_1 entspricht. Diese $9L_1$ ordnen sich zu 3 in 12 Systeme, gemäfs der Art, wie die 9 Puncte R, I zu drei in den $12K_1$ liegen, und die $3L_1$ jedes Systems schneiden sich in einem und demselben Puncte, und zwar sind diese Puncte die nämlichen vorgenannten Puncte Y; zudem gehen die $3L_1$ einzeln durch die Schnittpuncte $3X$ des entsprechenden Systems von $3K$. Endlich haben die 27 Puncte Z noch die Eigenschaft, dafs in jedem derselben die gegebene Curve von einer solchen Curve vierter Ordnung, welche A, B, C zu Doppelpuncten hat, sechspunctig berührt werden kann; u. s. w.

1°. Zieht man aus A, B, C (oder A_1, B_1, C_1) durch einen der Puncte R, S, T, etwa durch R, Gerade AR, BR, CR, so treffen diese die Curve zum dritten Mal in solchen Puncten α, β, γ, welche in einer Geraden G liegen *). Und umgekehrt: Zieht man irgend eine Gerade G, und weiter aus den Puncten α, β, γ, in denen sie die Curve schneidet, durch einen der Puncte R, S, T, etwa durch R, die Geraden $\alpha R, \beta R, \gamma R$, so treffen diese die Curve allemal in einem der genannten Systeme A, B, C; etc. Hiernach giebt es also ebensoviele Systeme A, B, C, als sich Gerade G in der Ebene ziehen lassen; jeder Geraden G entsprechen drei Systeme (in Bezug auf R, S, T); und umgekehrt: jedem System A, B, C entsprechen drei Gerade G.

2°. Legt man durch die drei Puncte R, S, T irgend einen Kegelschnitt K_1, so schneidet er die Curve in noch drei Puncten, welche allemal eines der genannten Systeme A, B, C; A_1, B_1, C_1; etc. sind. (Eben so schneidet jeder Kegelschnitt K, welcher die Curve in einem der drei Puncte R, S, T osculirt, dieselbe aufserdem in einem solchen System.) Hieraus ergeben sich folgende nähere Bestimmungen.

Der durch R, S, T gelegte Kegelschnitt K_1 kann insbesondere die Curve in irgend einem andern Puncte osculiren, in welchem dann die drei Puncte A_1, B_1, C_1 (oder A, B, C) zusammenfallen; und zwar kann dies, zufolge (I.), in drei reellen Puncten R_1, S_1, T_1 (und in 6 imaginären I_1) geschehen, und es müssen diese drei Puncte mit jenen R, S, T in einem Kegelschnitte K_0 liegen. Ferner findet die Wechselbeziehung Statt, dafs auch durch die Puncte R_1, S_1, T_1 drei Kegelschnitte K_0' gehen, welche die Curve einzeln in den Puncten R, S, T osculiren. Weiter giebt es 9 Kegelschnitte K_2, von welchen jeder die Curve in einem der Puncte R, S, T und zugleich in einem der Puncte R_1, S_1, T_1 osculirt. Endlich haben die zwei einander zugeordneten Systeme von drei Puncten R, S, T und R_1, S_1, T_1 allemal solche Lage, dafs, wenn man aus einem Puncte des einen Systems durch die Puncte des andern Systems Gerade zieht, diese drei Geraden der Curve stets in den nämlichen drei festen Puncten U, V, W begegnen. Die neun Geraden, welche die Puncte beider Systeme mit einander verbinden, treffen sich somit, zu 3

---

*) Die Aufgabe: *„Wenn in der Curve 3ter Ordnung drei beliebige Puncte A, B, C gegeben sind, in derselben denjenigen Punct X zu finden, für welchen die Geraden AX, BX, CX der Curve zum 3ten Mal in solchen Puncten α, β, γ begegnen, welche in einer Geraden liegen;"* hat im Allgemeinen neun Auflösungen; sie giebt für X die nämlichen, oben (I.) betrachteten neun Puncte $3R$ und $6I$.

und 3, in den festen Puncten U, V, W; diese Puncte liegen in einer Geraden. Sie sind die reellen Wendungspuncte der Curve.

Die Puncte R, S, T haben ferner die Eigenschaft, dafs die Tangente in jedem, und die Gerade durch die beiden andern, der Curve im nämlichen Puncte begegnen; so dafs also die Geraden TS, TR, SR und die Tangenten in R, S, T die Curve in den nämlichen drei Puncten r, s, t schneiden. Ebenso werden durch R_1, S_1, T_1 drei neue Puncte r_1, s_1, t_1 bestimmt. Diese neuen Systeme r, s, t und r_1, s_1, t_1 haben durchweg gleiche Eigenschaften, wie die vorigen; sie sind einander zugeordnet, und die 9 Geraden, welche sie wechselseitig verbinden, gehen ebenfalls, zu 3 und 3, durch die Wendungspuncte U, V, W; u. s. w.

III. Ändert von den Puncten A, B, C, blofs einer seine Lage, so ändern sich alle 9 Puncte R, I; kommen jene insbesondere in eine Gerade ABC zu liegen, so lösen sich die oben (I.) betrachteten Kegelschnitte K und K_1 in Systeme von zwei Geraden auf: die eine Gerade jedes Systems ist allen gemein; sie ist die eben genannte Gerade ABC: die andere ist *reell*, oder *imaginär*, je nachdem zuvor der betreffende Kegelschnitt reell oder imaginär war. Bezeichnen wir diese andern Geraden, wie zuvor die Kegelschnitte, durch K und K_1, so ergiebt sich aus dem obigen (I.) unmittelbar Folgendes:

„Eine Curve dritter Ordnung hat im Allgemeinen 9 Wendungspuncte: drei reelle $3R$, und sechs imaginäre $6I$, (ebenso 9 Wendungstangenten K: drei reelle, und sechs imaginäre). Von den 9 Wendungspuncten liegen 12mal 3 in einer Geraden K_1; von diesen 12 Geraden K_1 sind 4 reell und 8 imaginär; sie gruppiren sich zu 3 und 3 in vier Systeme, deren jedes eine reelle und zwei imaginäre Gerade K_1 enthält, die zusammen durch alle 9 Puncte R und I gehen; bei dem einen System geht die reelle Gerade durch die $3R$, und die zwei imaginären Geraden enthalten die $6I$ zu 3 und 3; bei den drei übrigen Systemen gehen die reellen Geraden einzeln durch die 3 Puncte R und durch 2 und 2 der 6 Puncte I; durch jeden der 9 Puncte R, I gehen vier Gerade K_1."

3. Eine Curve dritter Ordnung kann, im Allgemeinen, in jedem ihrer Puncte P von einem Kegelschnitte fünfpunctig berührt werden; beide Curven haben dann aufserdem noch einen sechsten Punct A gemein, der wie folgt bestimmt wird. Die Tangente in P an die Curve 3ter Ordnung schneide diese in P_1; die Tangente in P_1 treffe dieselbe in P_2: so begegnet ihr die Gerade PP_2 im verlangten Puncte A.

Stellt man sich in irgend zwei andern Puncten Q und R der Curve die sie fünfpunctig berührenden Kegelschnitte und die respectiven sechsten Puncte B und C, welche sie mit denselben gemein hat, vor, so finden unter andern folgende Beziehungen Statt:

1°. Liegen P, Q, R in einer Geraden, so liegen auch A, B, C in einer Geraden.

2°. Wird die Curve 3ter Ordnung in P, Q, R von einem und demselben Kegelschnitte berührt, so liegen alle 6 Puncte P, Q, R, A, B, C in irgend einem andern Kegelschnitte; und auch umgekehrt.

Berlin, im Juni 1845.

29.

Über das dem Kreise umgeschriebene Viereck.

(Von dem Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Die Lehrbücher der Geometrie enthalten den Satz:

„Dafs dem Viereck nur dann ein Kreis sich einschreiben lasse, wenn die Summen der Gegenseiten gleich sind.“

Dieser Satz ist mangelhaft und unvollständig; er ist in zwei Hinsichten nur ein Bruchstück. Man dachte dabei blofs an das convexe Viereck, und selbst bei diesem nur an den Fall, wo der Kreis keine Seite in ihrer Verlängerung berührt. Da man aber schon beim Dreieck diese Beschränkung aufgehoben und statt des *einen* eingeschriebenen Kreises, *vier* eingeschriebene Kreise betrachtet hat, so mufs auch dem Viereck eine freiere Auffassung zukommen. Der vollständigere und umfassendere Satz für das Viereck lautet wie folgt:

„Jedes Viereck, bei welchem entweder die Summe irgend zweier Seiten gleich ist der Summe der beiden übrigen, oder die Differenz irgend zweier Seiten gleich ist der Differenz der beiden übrigen, ist allemal einem Kreise umgeschrieben.“ Und umgekehrt: *„Bei jedem dem Kreise umgeschriebenen Viereck ist, in Betracht je zweier Seiten, entweder ihre Summe oder ihr Unterschied, beziehlich, gleich der Summe oder dem Unterschiede der beiden andern Seiten.“*

Dieser Satz gilt gleichmäfsig für alle drei Arten einfacher Vierecke: für *convexe, concave* (mit einspringendem Winkel) und *überschlagene.*

Die beiderlei Bedingungen über *Summe* oder *Unterschied* der Seiten des Vierecks finden immer *zugleich* Statt; jedoch die Summe nur auf *eine,* dagegen der Unterschied auf *zwei* verschiedene Arten. Sind a, b, c, d die Seiten, abgesehen von ihrer Aufeinanderfolge, und ist in Rücksicht ihrer Gröfse

$$1. \quad a > b > c > d,$$

so hat man *zugleich* die drei Gleichungen

$$2. \quad \begin{cases} a + d = b + c, \\ a - c = b - d, \\ a - b = c - d; \end{cases}$$

von denen jede die beiden andern zur Folge hat. Sind umgekehrt vier Gerade a, b, c, d unter einer dieser Bedingungen gegeben, und man verbindet sie nach beliebiger Ordnung zu irgend einem Viereck, so ist dieses, gemäfs des Satzes, allemal irgend einem Kreise umgeschrieben. Es können aber die vier Seiten nur nach drei wesentlich verschiedenen Ordnungen auf einander folgen, und somit giebt es in dieser Hinsicht nur drei verschiedene Viercke V_1, V_2 und V_3, die sich am leichtesten durch ihre Gegenseiten unterscheiden lassen, nämlich:

$V_1 = abdc$: Gegenseiten a und d, b und c;
$V_2 = abcd$: Gegenseiten a und c, b und d;
$V_3 = acbd$: Gegenseiten a und b, c und d.

Das Viereck ist durch die vier Seiten nicht bestimmt; vielmehr kann es seine Form unendfach ändern; es kann sogar aus einer der drei Haupt-Arten (convex, concav und überschlagen) in die andern übergehen. Von den unzähligen Formen, in welche jedes der drei in Betracht stehenden Vierecke V_1, V_2, V_3 durch stetige Veränderung übergehen kann, mögen sechs besonders hervorgehoben werden. Sie sind in den Figuren-Gruppen 1. 2. 3. Taf. IV. unter I. II. III. IV. V. und VI. dargestellt. Für alle drei Fälle ist Fig. I. ein convexes Viereck, und aus ihm folgen, durch blofses Verschieben, die fünf übrigen. Wir wollen sie einzeln betrachten.

Fig. 1. Hier kann I. übergehen in das Dreieck II., oder in das Dreieck III.; dort wird die Diagonale AC, hier die Diagonale DB ein Maximum. Sodann gehen II. und III. in die concaven Vierecke IV. und V. über, und von diesen kann sich jedes zuletzt auf den Grenzfall, die Gerade VI., reduciren, wo beide Diagonalen AC und DB zugleich ihr Minimum erreichen.

Fig. 2. Hier kann I. in das Dreieck II. übergehen; wobei die Diagonale AC ein Maximum wird. Sodann geht II. in das concave Viereck III. über; dieses weiter in IV., wo die Seite d auf a fällt und die Diagonale DB ein Minimum wird; ferner geht IV. in das überschlagene Viereck V. über, und dieses zuletzt in die Gerade VI., wo DB ihr Maximum und zugleich AC ihr Minimum erreicht. Man kann aber auch das convexe Viereck I. unmittelbar in die Gerade VI. übergehen lassen: durch Verlängerung der Diagonale DB bis zu ihrem Maximum.

Fig. 3. Hier entsteht aus I. das Dreieck II., wobei AC ein Maximum ist; sodann wird aus II. das concave Viereck III.; aus diesem der Übergangsfall IV., wobei d auf a fällt und DB ein Minimum wird; aus diesem

weiter das überschlagene Viereck V., welches zuletzt in die Gerade VII. übergeht; wobei DB ein Maximum und zugleich AC ein Minimum wird. Auch hier kann I. unmittelbar in die Gerade VI. übergehen.

Jedes der beiden Vierecke V_2 und V_3 kann somit von jeder der drei Arten: convex, concav oder überschlagen sein, wogegen das Viereck V_1 nur convex oder concav, aber nicht überschlagen sein kann, weil in einem überschlagenen Viereck die Summen der Gegenseiten niemals gleich sein können.

Was die Lage des eingeschriebenen Kreises gegen das Viereck betrifft, so liegt er bei allen Vierecken V_1 innerhalb, dagegen bei allen Vierecken V_2 und V_3 aufserhalb derselben. Bei den obigen sechs Formen sind folgende nähere Umstände anzugeben.

Fig. 1. Bei I. berührt der Kreis jede Seite zwischen ihren Endpuncten; bei II. berührt er die Seiten b und d in ihrem gemeinsamen Endpuncte B; bei IV. berührt er die Verlängerungen der Seiten b und d über B hinaus; und bei VI. reducirt er sich auf seinen Mittelpunct, der zwischen B und D liegt. Bei III. und V. findet Analoges Statt, wie bei II. und IV.

Fig. 2. und *3.* Bei I. berührt der Kreis alle Seiten in ihren Verlängerungen; bei II. berührt er zwei Seiten im Puncte B, die zwei andern in ihren Verlängerungen über A und C hinaus, so dafs er aufserhalb des Dreiecks ADC liegt; bei III. berührt er die an B liegenden Seiten zwischen ihren Endpuncten, die beiden andern in der Verlängerung über A und C hinaus; bei IV. berührt er zwei Seiten a und d in ihrem gemeinsamen Endpuncte A, und von den übrigen die eine zwischen ihren Endpuncten und die andere in der Verlängerung; bei V. berührt er die sich kreuzenden Seiten zwischen ihren Endpuncten und die beiden andern in ihren Verlängerungen über A und C hinaus, so dafs er zwischen diesen Ecken A und C liegt; bei VI. endlich reducirt sich der Kreis auf seinen Mittelpunct.

Um die den Vierecken V_1, V_2, V_3 eingeschriebenen Kreise zu unterscheiden, sollen sie beziehlich durch K_1, K_2, K_3, und ihre Radien durch r_1, r_2, r_3 bezeichnet werden. Jeder dieser Kreise hat in Rücksicht seiner Gröfse, im Allgemeinen, einen begrenzten Spielraum; sein Radius kann stetig abnehmen, bis er Null wird: dagegen kann er nicht beliebig zunehmen, sondern nur bis zu einem bestimmten Maximum; welches näher anzugeben ist.

Man setze

$$3.\quad \begin{cases} a+d = b+c = s, \\ a-c = b-d = t, \\ a-b = c-d = u. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken beziehlich das Verhalten der Gegenseiten bei den drei Vierecken V_1, V_2, V_3 aus. Werden die Maxima der Radien r_1, r_2, r_3 durch R_1, R_2, R_3 bezeichnet, so hat man

$$4. \quad R_1 = \frac{\sqrt{(abcd)}}{s}; \quad R_2 = \frac{\sqrt{(abcd)}}{t}; \quad R_3 = \frac{\sqrt{(abcd)}}{u};$$

und daher

$$5. \quad R_1 : R_2 : R_3 = \frac{1}{s} : \frac{1}{t} : \frac{1}{u};$$

und weil $s > t > u$ ist, so ist auch

$$6. \quad R_3 > R_2 > R_1.$$

Hiernach läfst sich die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der folgenden Aufgabe leicht ermessen.

„Ein Viereck, dessen Seiten gegeben sind und zudem den obigen Bedingungen (2.) *genügen, einem gegebenen Kreise K umzuschreiben.“*

Ist R der Radius des gegebenen Kreises und ist $R > R_3$, so ist die Lösung unmöglich. Ist dagegen $R < R_1$, so sind 6 reelle Lösungen möglich; nämlich von jedem der drei Vierecke V_1, V_2, V_3 sind zwei verschiedene möglich. Ist ferner $R > R_1$, aber $R < R_2$, so sind 4 reelle Lösungen möglich; nämlich von den Vierecken V_2 und V_3 sind von jedem zwei möglich. Und ist endlich $R > R_2$ und $R < R_3$, so sind nur zwei verschiedene Vierecke V_3 möglich. Diese als möglich angegebenen Vierecke sind zu construiren.

In Betracht der drei Vierecke V_1, V_2, V_3, können auch besondere Fälle eintreten. Die Seiten können theilweise, oder auch alle einander gleich sein, ohne dafs dadurch die obige Bedingung (2.) gestört wird. Nämlich es kann sein:

$\alpha)$ $b = c$, oder
$\beta)$ $a = b$, und $c = d$, oder
$\gamma)$ $a = b = c = d$.

Im Falle (α) verschwindet jeder Unterschied zwischen den Vierecken V_2 und V_3, und die obigen Maxima (4.) reduciren sich auf

$$7. \quad R_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(ad)}; \quad R_2 = R_3 = \frac{b\sqrt{(ad)}}{a-b}.$$

Im Falle (β) werden die Vierecke V_1 und V_2 ein und dasselbe, aber die Kreise K_1 und K_2 bleiben verschieden; so dafs also demselben Viereck V_1 zwei verschiedene Kreise zugleich eingeschrieben sind. Das Viereck V_3 wird ein Parallelogramm, der ihm eingeschriebene Kreis K_3 wird unendlich grofs

und sein Mittelpunct ist unendlich weit entfernt. Die Maxima werden hier

$$8. \quad R_1 = \frac{ac}{a+c}; \quad R_2 = \frac{ac}{a-c}; \quad R_3 = \frac{ac}{0} = \infty.$$

Im Falle (γ) sind alle drei Vierecke gleich, sind Rauten, und für die Maxima hat man

$$9. \quad R_1 = \tfrac{1}{2}a; \quad R_2 = R_3 = \frac{a}{0} = \infty.$$

Werden die Seiten eines einfachen Vierecks verlängert, so entsteht das vollständige Vierseit, und dieses besteht dann aus drei einfachen Vierecken, von welchen das eine convex, das andere concav und das dritte überschlagen ist. Ist eines dieser einfachen Vierecke einem Kreise umschrieben, so sind auch die beiden andern, so wie das vollständige Vierseit, demselben umschrieben. Und umgekehrt: je vier Tangenten eines Kreises bilden ein umschriebenes vollständiges Vierseit, bestehend aus drei einfachen Vierecken, die alle demselben Kreise umschrieben sind, so dafs die Seiten eines jeden der obigen Bedingung (2.) genügen.

Es sei Fig. 4. ein vollständiges Vierseit. Die drei einfachen Vierecke, welche es enthält, sind:

Das convexe $ABCDA = \mathfrak{A}$,
Das concave $EDFBE = \mathfrak{B}$,
Das überschlagene $AECFA = \mathfrak{C}$.

Nach blofs äufserlichem Ansehen der Figur kann der eingeschriebene Kreis sich nur auf zwei Arten gegen das vollständige Vierseit verhalten; nämlich er liegt entweder

α) Im Raume X, oder
β) Im Raume Y.

Im Falle (α) sind bei den Vierecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Summen und bei $\mathfrak{C}$ die Unterschiede der Gegenseiten gleich; oder bei $\mathfrak{C}$ sind die Summen der den Ecken A und C anliegenden Seiten gleich. Also ist

$$10. \quad \begin{cases} AB+CD = AD+CB, \\ BE+DF = BF+DE, \\ AE+AF = CE+CF. \end{cases}$$

Im Falle (β) sind in jedem der drei einfachen Vierecke die Unterschiede der Gegenseiten gleich; oder bei $\mathfrak{A}$ sind die Summen der den Ecken A und C, bei $\mathfrak{B}$ die Summen der den Ecken E und F, und bei $\mathfrak{C}$ die Summen der den Ecken E und F anliegenden Seiten gleich. In Zeichen ist also

$$11.\quad \begin{cases} AB+AD = CB+CD, \\ EB+ED = FB+FD, \\ EA+EC = FA+FC. \end{cases}$$

Hieraus läfst sich entnehmen, wie man, wenn eines der drei einfachen Vierecke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ unter der Bedingung (2.) gegeben ist, alsdann auf das Verhalten der beiden andern, so wie auf die Lage des Kreises schliefsen kann. Z. B. bei dem überschlagenen Viereck $\mathfrak{C}$ liegt der Kreis immer zwischen denjenigen Gegen-Ecken (A und C, oder E und F), an denen die anliegenden Seiten gleiche Summen haben; u. s. w.

Bemerkung. Der obige Lehrsatz über das dem Kreise umgeschriebene ebene Viereck, so wie die übrigen Betrachtungen über dasselbe, finden auf gleiche Weise auch für das sphärische Viereck statt.

30.

MÉMOIRE
sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer.

Une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits.

(Par l'éditeur.)

(Fin du mémoire No. 3 au premier, No. 14 au second et No. 26. au troisième cahier de ce tome.)

Calcul de la force et de la masse d'air comprimé nécessaire dans le système No. IV. §. 4.

62.

A. Dans le système No. IV. (§. 4) c'est le tube de propulsion, placé entre les rails, qui sert de ***réservoir*** d'air comprimé, d'où la locomotive à air, à la tête du train des wagons, puise la force nécessaire de traction. Donc il faut que ce tube ne contienne pas seulement la masse d'air comprimé que la locomotive consume, mais il faut aussi que l'air qui reste dans le tube après que la locomotive en a enlevé ce qu'il lui faut, ait encore la tension nécessaire pour produire la force de traction que la résistance des wagons demande sur tous les points de la voie, jusqu'à la fin du trajet. La force effective que par cette raison l'air qui est dans le tube doit conserver jusqu'à la fin du trajet, sera ordinairement ***perdue:*** car si elle ne peut pas être utilisée instantanément pour pousser un second train, l'air comprimé s'échappera bientôt par la soupape longitudinale, dont la fermeture n'est jamais absolument complète.

B. Désignons, comme ci-dessus, par μ_m la tension effective de l'air comprimé, nécessaire sur la ***plus forte*** pente β_m de la voie, et par μ_z la tension de l'air nécessaire pour la pente β_z ***à la fin*** du trajet. Nous supposerons le cas ***le plus favorable,*** savoir celui, où les plus fortes pentes se trouvent au ***commencement*** du trajet, et où les pentes diminuent environ dans la même proportion que la tension de l'air dans le tube est diminuée par l'épuisement opéré par la locomotive, de sorte que les dernières pentes de la voie soient les plus faibles. Souvent le profil longitudinal de la voie sera moins favorable;

il se pourra même que le train ait à gravir encore vers la fin de son trajet de fortes pentes, et où il faut par conséquent que le tube-réservoir contienne encore jusqu'au bout un air comprimé d'une forte tension, qui alors sera perdu.

Dans le cas le plus favorable supposé, la masse d'air atm. qui doit se trouver dans le tube de propulsion sera $\frac{1}{4}\pi\delta^2 L(1+\mu_m)$, et celle qui doit y rester encore à la fin du trajet, sera $\frac{1}{4}\pi\delta^2 L(1+\mu_z)$, L étant la longueur de la voie et δ le diamètre du tube.

C. Donc, si la consommation d'air pendant le trajet est désignée comme ci-dessus par S, cette masse d'air doit être égale à la *différence* des deux masses ci-dessus, ce qui donne

$$510. \quad S = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2 L(1+\mu_m-1-\mu_z) = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2(\mu_m-\mu_z)L.$$

Cette équation déterminera le diamètre δ du tube et on obtient

$$511. \quad \delta^2 = \frac{4S}{\pi L(\mu_m-\mu_z)}.$$

D. Mais la masse d'air S n'est pas celle qui est consommée en un trajet. C'est plutôt la masse *totale* d'air que le tube de propulsion doit contenir au *commencement* du trajet, et que nous désignerons par S_m; car ce qui en reste à la fin du trajet est *perdu* (suivant la remarque (*A.*)) toutes les fois qu'un nouveau trajet ne suit pas immédiatement le premier. Donc la consommation pendant un trajet sera ordinairement

$$512. \quad S_m = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2 L\mu_m,$$

ou, en substituant la valeur de δ^2 (511):

$$513. \quad S_m = S\cdot\frac{\mu_m}{\mu_m-\mu_z} \text{ mèt. cub. d'air atm.}$$

E. Pour prévoir tous les cas, on pourra supposer une locomotive de *seconde* sorte, où l'air comprimé n'est pas introduit dans les cylindres durant *toute* la course λ des pistons, mais seulement pendant la partie

$$514. \quad k = \frac{\lambda}{1+\mu_1} \ (340)$$

de cette course, et où alors l'effet de la machine est un maximum dans le cas où l'air introduit dans les cylindres a la tension μ_1; car le cas des locomotives de *première* sorte n'est que le cas particulier $\mu_1 = 0$ de celui des locomotives de seconde sorte.

Or pour les locomotives de *seconde* sorte, la formule (378) donne pour les tensions μ_m et μ_z de l'air comprimé nécessaires sur la pente β_m (la plus forte de la voie), et sur celle β_z à l'extrémité de la voie :

515. $$1+\mu_m = \frac{1+\mu_1}{1+\log\text{nat}(1+\mu_1)}\left[1+\frac{QD(n+\text{tang}\,\beta_m)}{\Delta^2\lambda\sigma}\right] \text{ et}$$

516. $$1+\mu_z = \frac{1+\mu_1}{1+\log\text{nat}(1+\mu_1)}\left[1+\frac{QD(n+\text{tang}\,\beta_z)}{\Delta^2\lambda\sigma}\right].$$

F. De (515 et 516) on tire

517. $$\mu_m-\mu_z = \frac{1+\mu_1}{1+\log\text{nat}(1+\mu_1)}\cdot\frac{QD(\text{tang}\,\beta_m-\text{tang}\,\beta_z)}{\Delta^2\lambda\sigma} \text{ et}$$

518. $$\mu_m = \frac{(\mu_1-\log\text{nat}(1+\mu_1))\Delta^2\lambda\sigma+(1+\mu_1)QD(n+\text{tang}\,\beta_m)}{1+\log\text{nat}(1+\mu_1)\Delta^2\lambda\sigma},$$

et cela substitué dans (513) donne

519. $$S_m = S\cdot\frac{(\mu_1-\log\text{nat}(1+\mu_1))\Delta^2\lambda\sigma+(1+\mu_1)QD(n+\text{tang}\,\beta_m)}{(1+\mu_1)QD(\text{tang}\,\beta_m-\text{tang}\,\beta_z)}.$$

G. Dans cette expression il faudra encore substituer celle de S qui dépend encore de μ_1.

Supposons un chemin de fer où il n'y a pas de pentes si fortes que la gravité seule en puisse faire descendre le train, ce qui serait aussi un cas *favorable* pour le système No. IV, puisqu'alors la tension la plus forte, que l'air comprimé dans le tube doit avoir, n'est pas très-considérable. Puis, pour abréger, mettons à côté la masse d'air nécessaire pour *engendrer* la vitesse au départ du trajet. Alors l'expression (440) donne S et on obtient par (519):

520. $$S_m = \frac{L(QD(n+\text{tang}\,\gamma)+\Delta_2\lambda\sigma}{(1+\log\text{nat}(1+\mu_1))D\sigma}\cdot\frac{(\mu_1-\log\text{nat}(1+\mu_1))\Delta\lambda^2\sigma+(1+\mu_1)QD(n+\text{tang}\,\beta_m)}{(1+\mu_1)QD(\text{tang}\,\beta_m-\text{tang}\,\beta_z)},$$

en désignant par γ l'angle qu'une droite tirée par les deux points extrèmes de la voie ferait avec l'horizon; car pour appliquer à la totalité de la voie la formule (440), qui ne se rapporte que sur une partie de la voie, dont la pente β est ***constante,*** il n'y a suivant (§. 35. *S.*) qu'à prendre la somme ***algébrique*** des hauteurs positives et négatives des pentes.

H. Maintenant on aurait à calculer la valeur de μ_1, qui par la formule (520) donne un ***Minimum*** pour S_m, en supposant que toutes les quantités qui se présentent dans cette formule, et par conséquent aussi les dimensions λ et Δ des cylindres de la machine, ont été déjà déterminées.

Mais comme alors S est déterminé par μ_1, et que le diamètre δ (511) du tube de propulsion en dépend, on pourrait parvenir à un δ trop fort, ou trop faible, et le diamètre du tube est déjà presque fixé par lui même. Il ne peut pas être trop faible, pas même au dessous de 36 centimètres, dimension que

la construction de la soupape longitudinale et son maniement demande au moins; ni trop fort, parceque un grand tube est extrèmement coûteux.

Il s'agit donc plutôt dans (512), que μ_m soit aussi petit que possible, à condition que S (510), pour cette valeur de μ_m, ait encore la grandeur suffisante. Suivant (510) on a

521. $$\tfrac{1}{4}\pi\delta^2 L\mu_m = S + \tfrac{1}{4}\pi\delta^2 L\mu_z,$$

donc S_m (512) pourra aussi être exprimé par

522. $$S_m = S + \tfrac{1}{4}\pi\delta^2 L\mu_z,$$

et en substituant dans cette expression celles de S et de μ_z (440 et 516), on obtient

523. $$S_m = \frac{L}{1+\log\text{nat}(1+\mu_1)}\Big[\frac{Q}{\sigma}\big(n+\text{tang}\,\gamma\big)+(1+\mu_1)\frac{\pi\delta^2 D}{4\Delta^2\lambda}\big(n+\text{tang}\,\beta_z\big)\Big) + \frac{\Delta^2\lambda}{D}\tfrac{1}{4}\pi\delta^2(\mu_1-\log\text{nat}(1+\mu_1))\Big].$$

Voilà la formule par laquelle μ_1 est à fixer, afin qu'il donne pour S_m un *minimum*. Ce calcul n'étant pas possible sans le secours de séries infinies, il faudra calculer le résultat demandé au moyen de quelques essais.

63.

A. Après avoir trouvé la valeur de S_m, il s'agit de calculer la force que doivent avoir les ***machines pneumatiques,*** destinées à comprimer l'air dans le tube de propulsion depuis la tension 1 jusqu'à la tension $1+\mu_m$. Cette force sera alors celle nécessaire pour un trajet.

B. Suivant (§. 23. 76.) le *moment* de la force nécessaire pour comprimer l'air dans un bassin du volume b, depuis la tension $1+\lambda$ jusqu'à la tension $1+\nu$, est

524. $$N = \tfrac{1}{2}\sigma b(\nu^2-\lambda^2).$$

Si ν et λ, comme il peut arriver ici, sont très-différents, un piston de la pompe, de grandeur invariable, ne sera pas propre pour opérer toute la compression; car la force nécessaire pour faire descendre ce piston, varie trop sensiblement. Elle est pour le *premier* coup du piston

525. $$= k\sigma\Big(\lambda+\frac{k}{2b}\Big)$$

et avant le *dernier* coup

526. $$= k\sigma\Big(\lambda+(n-\tfrac{1}{2})\frac{k}{b}\Big) = k\sigma\Big(\lambda+(\nu-\lambda-\tfrac{1}{2})\frac{k}{b}\cdot\frac{b}{k}\Big) = k\sigma(\nu-\tfrac{1}{2}),$$

et cette dernière force est presque le même multiple de la première, que ν l'est de λ.

Donc, si l'on veut que la force qui met en mouvement la pompe, ne soit point par trop variable, que le mouvement ne soit pas trop peu uniforme, et si l'on ne veut pas compter trop sur les volants, on sera forcé, ou de se servir successivement de plusieurs pistons peu à peu plus petits, ou, si l'on veut garder le même piston, de le faire monter et descendre successivement peu à peu à une moindre hauteur.

C. Supposons qu'en commençant, m_1 chevaux, travaillant t_1 secondes, opèrent par un grand piston la compression de l'air depuis la tension λ jusqu'à celle ν_1, qu'après cela m_2 chevaux, travaillant t_2 secondes, opèrent la compression de cet air depuis la tension ν_1 jusqu'à celle ν_2, par un plus petit piston; et ainsi de suite. Cela posé, en désignant par N_1, N_2, N_3 etc. les *moments* des forces nécessaires pour ces opérations successives, on a

$$527. \quad m_1 t_1 \varphi = N_1, \quad m_2 t_2 \varphi = N_2, \quad m_3 t_3 \varphi = N_3, \ldots.$$

Veut-on maintenant que la force motrice soit autant qu'il sera possible toujours *la-même,* comme cela est à désirer, on aura

$$528. \quad m_1 = m_2 = m_3 \ldots. = m.$$

Les formules (527) donnent alors

$$529. \quad m(t_1 + t_2 + t_3 \ldots.)\varphi = N_1 + N_2 + N_3 \ldots.,$$

et si l'on désigne par t toute la durée de l'opération, de sorte que

$$530. \quad t_1 + t_2 + t_3 \ldots. = t,$$

on obtient

$$531. \quad mt\varphi = N_1 + N_2 + N_3 \ldots.$$

Or suivant (524) on a

$$532. \quad \begin{cases} N_1 = \frac{1}{2}\sigma b(\nu_1^2 - \lambda^2), \\ N_2 = \frac{1}{2}\sigma b(\nu_2^2 - \nu_1^2), \\ N_3 = \frac{1}{2}\sigma b(\nu_3^2 - \nu_2^2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_n = \frac{1}{2}\sigma b(\nu^2 - \nu_{n-1}^2). \end{cases}$$

Cela étant subsitué dans (531), on obtient

$$533. \quad mt\varphi = \tfrac{1}{2}\sigma b(\nu^2 - \lambda^2) \text{ et}$$

$$534. \quad m = \frac{\frac{1}{2}\sigma b(\nu^2 - \lambda^2)}{t\varphi}.$$

D. Dans les systèmes No. I, II, III, §. 4, à tube de propulsion, soit que dans ces tubes l'air *comprimé* pousse un piston ou une roue devant lui, soit que l'air *raréfié* attire pour ainsi dire à lui le piston: des *réservoirs,* dans lesquels on comprime ou raréfie l'air, en tirant ensuite de ces réservoirs l'air

comprimé et le conduisant dans le tube de propulsion, ou en laissant s'introduire l'air atm. du tube dans le réservoir vidé, seront avantageux; comme cela a été demontré plus haut, parceque les machines pneumatiques, qui opèrent la compression ou la raréfaction de l'air dans les réservoirs, peuvent alors fonctionner sans *interruption;* ce qui ne pourrait avoir lieu dans les cas où la compression, ou la raréfaction de l'air devrait être immédiatement operée dans le tube de propulsion.

Mais ici, dans le système No. IV, où la machine pneumatique n'a qu'à épuiser, *pendant* le trajet, l'air qui s'est échappé par la soupape longitudinale: des réservoirs séparés du tube sont *moins* nécessaires. Ils seraient même désavantageux, parcequ'il faut que l'air y soit comprimé à une plus forte tension que dans le tube de propulsion. Il sera donc mieux que les machines pneumatiques introduisent ici l'air *immédiatement* dans le tube de propulsion. Mais il faut alors ajouter à la masse d'air nécessaire un excédant destiné à restituer ce qui s'est échappé par la soupape, et qui soit en proportion avec la durée du travail des pompes.

E. Le volume b du tube de propulsion est

$$535. \qquad b = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2 L,$$

et parceque la tension de l'air y doit être élevée de 1 jusqu'à $1+\mu_m$, on a ici $\lambda = 0$ et $\nu = \mu_m$. Cela étant substitué dans (534), donne

$$536. \qquad m = \frac{\frac{1}{2}\sigma\cdot\frac{1}{4}\pi\delta^2 L\mu_m^2}{t\varphi} = \frac{\pi\delta^2 L\sigma\mu_m^2}{8t\varphi},$$

ou bien aussi suivant (512):

$$537. \qquad m = \frac{\sigma S_m \mu_m}{2t\varphi}.$$

Voilà le nombre des chevaux nécessaires pour comprimer dans le tube de propulsion la masse d'air S_m jusqu'à la tension μ_m. Il y a à y ajouter encore ce qui s'échappera par la soupape pendant la durée du travail.

64.

Nous prendrons pour exemple, comme ci-dessus, le chemin de fer de Berlin à Potsdam. Il y est assez propre, au moins quant au trajet de Berlin à Potsdam; car sur cette voie les pentes les plus fortes se trouvent effectivement près de Berlin, et elles diminuent assez régulièrement jusqu'à Potsdam, où la voie est horizontale.

La longueur de ce chemin de fer est de 26363 mèt.; son extrémité à Potsdam est de 2,2 mèt. au dessus de celle de Berlin, et sa plus forte pente est de 1 sur 300.

A. Comme cette voie n'a pas de pentes si fortes que la gravité seule en puisse faire descendre les trains, la masse d'air atmosphérique nécessaire pour ***un trajet*** et pour une locomotive de ***première*** sorte est, suivant (216)

$$538. \quad S_0 = L\left(\frac{\Delta^2 \nu}{D} + \frac{nQ}{\sigma}\right) + H_1 \frac{Q}{\sigma} + \frac{c^2}{4g(\tang\beta_m - \tang\beta_0)} \cdot \frac{\lambda^2}{D^2}\left(\Delta^2 \frac{\lambda}{D} + \frac{Q}{\sigma}(n + \tang\beta)\right),$$

où β_m désigne la plus forte pente qui est ici $\frac{1}{300}$, β_0 la pente zéro, à l'extrémité de la voie, là où la vitesse c, que nous supposerons $= 12{,}5$ mèt., doit être engendrée, et H_1 la différence du niveau des deux extrémités de la voie qui est ici de 2,2 mètres. Le poids Q du train sera supposé comme ci-dessus $= 92770$ kilogr.

B. Comme suivant (515 et 516) μ_m et μ_z sont d'autant moindres que les dimensions Δ et λ des cylindres de la locomotive sont plus fortes, nous supposerons ces dimensions, comme dans (452), $\Delta = 31{,}4$ et $\lambda = 42$ centimètres. Alors, en supposant comme ci-dessus $D = 1{,}57$ mèt., la formule (538) donne

$$539. \quad S_0 = 1770 \text{ mèt. cub.}$$

C. Puis, comme il a été déjà calculé (453), on a

$$540. \quad 1 + \frac{QD(n + \tang\beta_m)}{\Delta^2 \lambda \sigma} = 3{,}75.$$

Pour $\tang\beta_z = 0$, savoir pour la pente à l'extrémité de la voie, on a

$$541. \quad 1 + \frac{QDn}{\Delta^2 \lambda \sigma} = 2{,}5.$$

La quantité (540) donne comme dans (454), en posant dans (515) différentes valeurs de μ_1:

542. $\mu_m =$	2,75	3,424	4,364	5,286	6,187	7,057	7,909
pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6

La quantité (541) donne

543. $\mu_z =$	1,5	1,949	2,576	3,191	3,791	4,371	4,940
pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6

donc on obtient

544. $\mu_m - \mu_z =$	1,25	1,475	1,788	2,095	2,396	2,686	2,969
pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6

D. De l'autre côté, comme suivant (§. 54. ***G.***)

$$545. \quad S = \frac{S_0}{1 + \log\text{nat}(1 + \mu_1)},$$

la formule (538), en tirant de (439) les valeurs de $1 + \log\text{nat}(1 + \mu_1)$, donne

546. $S =$	1770	1050	844	742	678	634	601 mèt. cub.
pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6

E. Si l'on donne au tube de propulsion un diamètre de 36,6 centim., son volume est

547. $\frac{1}{4}\pi\delta^2 L = 2777$ mèt. cub.

Comme suivant (510) ce volume multiplié par $\mu_m - \mu_z$ donne S, on voit par (546, 547 et 544) que déjà la plus petite valeur 0 de μ, donne à S une plus grande valeur qu'il ne lui faut; car déjà $\mu_m - \mu_z = 1{,}25$ pour $\mu_1 = 0$ (544) donne $\frac{1}{4}\pi\delta^2 L(\mu_m - \mu_z) = 2777 \cdot 1{,}25 = 3471 = S$, tandis que pour $\mu_1 = 0$ il ne faut à S que 1770 mèt. cub. (546). Donc ici une locomotive de *première* sorte est à sa place, et l'air dans le tube de propulsion n'est à comprimer que jusqu'à la tension de $\mu_m = 2{,}75$ atm. Cela substitué dans (512) donne

548. $S_m = 2777 \cdot 2{,}75 = 7637$ mèt. cub.

F. Supposons qu'on ait à faire par jour 12 courses en 12 heures: le piston de propulsion parcourra alors le tube de propulsion ***une fois chaque heure.*** Donc il faut que les pompes puissent reproduire en 60 minutes la plus forte tension de l'air qui est nécessaire. De ce temps, celui du trajet est à déduire, et si l'on divise ici la longueur de toute la voie en 4 parties, la durée du trajet pour une de ces parties sera de 10 à 12 minutes, de sorte que 48 à 50 minutes restent pour le travail des machines pneumatiques. Mais comme ces machines doivent avoir une force suffisante, encore dans les cas imprévus où des courses doivent se succéder à des intervalles de temps moindres, il faudra qu'elles aient au moins la force de produire en ***30 minutes*** la tension nécessaire de l'air comprimé. Donc on a $t = 30 \cdot 60 = 1800$, et (537) donne pour le nombre de chevaux nécessaires:

549. $m = 934.$

G. A ce nombre, il faut ajouter 10 pour cent, à cause du frottement dans les machines.

Si les courses se succèdent ***regulièrement,*** d'heure en heure, de sorte qu'aussitôt qu'une course à été faite, les machines puissent commencer à reproduire la tension perdue de l'air, il n'y aura pas à ajouter encore quelque force pour la réintroduction de l'air qui s'est *échappé par la soupape longitudinale,* car cette perte d'air est déjà calculée abondamment en ayant mis S_m à la place de S, c'est-à-dire en ayant supposé que *pendant* l'action des pompes tout l'air qui reste encore après le trajet se sera échappé par la soupape. En effet, la valeur de m calculée ci-dessus, donnera la force nécessaire pour comprimer l'air dans le tube de propulsion jusqu'à la tension la plus forte, *en*

partant de celle 1 de l'atmosphère, tandis que dans les cas où les courses se suivent régulièrement, la compression ne commence pas par la tension 1, mais par celle qui reste à l'air dans le tube à la fin d'une course, et qui est plus forte que 1. Par ce surcroît de force, celle qui sera encore nécessaire pour réintroduire dans le tube l'air échappé par la soupape, sera largement compensée. Cependant toutefois la force calculée ci-dessus sera nécessaire pour les cas où les courses se suivent irrégulièrement. Il faudra donc supposer

550. $m = 934 + \frac{1}{10} \cdot 934 = 1073$ chevaux.

Calcul de la force et de la masse d'air comprimé nécessaire dans le système No. V. §. 4.

65.

A. Dans ce cas aussi des réservoirs stationnaires, destinés à la compression de l'air avant son introduction dans les réservoirs placés sur la locomotive à air, ne seront ici ni *nécessaires* ni *avantageux*. Ils ne seront pas *nécessaires,* parceque les réservoirs d'air placés sur les locomotives n'ont pas de soupape fermant mal, comme les tubes de propulsion des systèmes N^{os} I, II et IV, et que par conséquent il n'est pas urgent, d'accélerer la compression de l'air dans ces réservoirs, tandis que d'un autre côté rien ne s'oppose ou à rapprocher les locomotives des machines pneumatiques, ou à amener l'air comprimé de celles-ci dans les locomotives par un tube de communication. Les réservoirs stationnaires seraient même *désavantageux* ici, parceque l'air y devrait être comprimé à un plus haut degré qu'il ne le faut à la locomotive. Donc la nécessité et les avantages des réservoirs stationnaires qui ont lieu pour tous les systèmes à tube de propulsion placé entre les rails, n'existent pas ici; ces réservoirs ne causeraient ici que des frais inutiles. Les machines pneumatiques auront ici à comprimer l'air immédiatement dans les réservoirs mobiles placés sur les locomotives.

B. Ensuite, il n'y a pas ici de perte de force d'air provenant des *soupapes.* Il ne faudra donc aux réservoirs que la masse d'air comprimé, rigoureusement nécessaire pour produire la force motrice de la locomotive; à condition cependant que la machine aura sur *tous les points de la voie,* jusqu'à la fin du trajet, la force qui lui est nécessaire en tout cas. Mais la force expansive qui reste encore à l'air dans les réservoirs à la fin du trajet, n'est pas *perdue* ici, comme dans le système No. IV: les pompes n'auront donc qu'à réaugmenter cette tension jusqu'à celle qui est demandée pour les plus fortes pentes.

Presque toujours on pourra disposer les différentes stations d'un chemin de fer, de manière que les plus fortes pentes à gravir ne se trouveront pas ***vers la fin*** du trajet; pour cela il suffira de ne jamais placer les stations sur les points les plus ***élevés*** de la voie, mais au contraire sur les points les plus ***bas,*** et au bas des pentes les plus fortes. Donc il suffira dans tous les cas, que l'air comprimé dans les réservoirs des locomotives ne conserve à la fin d'une course que la force motrice nécessaire pour une voie ***horizontale.*** Il n'est pas même nécessaire que l'air comprimé ait cette tension dans ***tous*** les cylindres placés sur la locomotive, dont la totalité constitue le réservoir d'air de la machine; il suffira que cette tension existe dans un seul ou dans quelques uns des cylindres; car sur les pentes que le train ***descend,*** l'air comprimé pourra être tiré de quelques autres cylindres jusqu'à la tension effective ***zéro;*** sur les pentes plus fortes, que le train descend, la machine, comme il a été expliqué plus haut, réintroduira même de l'air dans les cylindres qui ont été vidés pendant le trajet. Cependant, comme le système No. V, comme on le verra, est le plus avantageux de tous, pour démontrer d'autant plus incontestablement ses avantages, nous lui supposerons la condition défavorable, que ***tous*** les cylindres doivent encore à la fin du trajet conserver la tension de l'air que demande la force propulsive nécessaire pour une voie ***horizontale.***

C. Comme il est à désirer que la force d'une locomotive à air suffise pour un trajet ***aussi long que possible,*** afin d'éviter le changement des machines et l'établissement de nouvelles pompes, et comme d'un autre côté, il est nécessaire que les réservoirs d'air prennent sur la locomotive aussi peu de place que possible, nous ne bornerons pas la tension à donner à l'air dans les réservoirs à celle que les ***plus fortes pentes*** demandent; nous supposerons au contraire, qu'une tension aussi forte que possible ***sans danger d'explosion,*** doit être donnée à cet air.

Dans les machines ***à vapeur*** on admet sans scrupule une tension effective de la vapeur de ***huit*** atmosphères. Donc il ne sera pas trop, de poser ***seize*** atmosphères pour le ***maximum*** de la tension effective de l'air comprimé dans les réservoirs d'une locomotive à air, construits en tôle de fer laminée. Car la tension de la ***vapeur*** dans les machines à vapeur, peut encore ***augmenter*** par plusieurs raisons imprévues, par ex. si l'eau vient à manquer dans la chaudière, si la soupape de sureté ne fonctionne pas etc. Ces différents cas ne peuvent pas se présenter dans les réservoirs ***d'air*** comprimé. La tension n'y peut jamais aller au délà du degré fixé, qui pourra être mesuré par un manomètre

avec une exactitude et une sureté parfaites. Elle ne peut jamais *augmenter;* elle ne peut que *diminuer*. Par cette raison, même des soupapes de sureté seront ici absolument inutiles *pendant* le trajet; l'air comprimé n'exercera pas d'autre force sur les réservoirs que celle de sa tension. Le danger d'une explosion, supposé qu'il existe, aurait toujours plutôt lieu *avant* que *pendant* une course, parceque la tension *diminue* toujours pendant le trajet. C'est le contraire dans les *locomotives à vapeur.* Puis, le danger d'une explosion des réservoirs d'air comprimé pourra être sans doute éloigné complètement, si l'on donne aux parois des réservoirs *le triple* de la solidité nécessaire effectivement, comme cela se pratique pour les chaudières à vapeur. Les cylindres d'air d'une locomotive à air sont *visibles* de tous côtés, ce qui n'est pas le cas des chaudières à vapeur; et enfin, si même une explosion avait lieu, elle serait moins dangereuse que celle d'une chaudière, car il n'y a ici ni feu ni eau bouillante; aussi *tous* les cylindres ne feront pas explosion en même temps, comme *toute* une chaudière; ce ne sera qu'un seul cylindre qui crévera, et si ce n'est point par hazard un des cylindres extérieurs, mais un de ceux qui se trouvent au milieu d'autres, et que le cylindre *crève* seulement, sans que la force expansive de l'air le mette en pièces et projette des éclats (ce qui est peu probable), le danger sera extrêmement diminué.

Suivant ces remarques préliminaires nous aurons à faire les calculs du système No. V.

66.

A. Désignons par b le volume des réservoirs d'air de la locomotive, par $1+\mu_z$ la tension qu'il faut encore à l'air comprimé dans les réservoirs *à la fin* d'une course, et par $1+\mu_s$ celle au *commencement* de la course. Cette dernière n'est pas seulement suivant (§. 65) celle qu'exige la *plus forte pente* β_m de la voie: elle est supposée aller au delà, jusqu'au maximum de 16 atm. Cela posé, la masse d'air atm. destinée à être épuisée pendant la course du train, est $= (1+\mu_s-(1+\mu_z))\,b = (\mu_s-\mu_z)\,b$, et comme cette masse doit être égale à celle S, nécessaire pour effectuer le trajet, on a

$$551. \quad b(\mu_s-\mu_z) = S,$$

et délà on tire

$$552. \quad b = \frac{S}{\mu_s-\mu_z}.$$

Cette expression donne le volume b nécessaire aux réservoirs, si μ_s et μ_z sont déterminés, et si de (551) on tire

$$553. \quad \mu_s = \frac{S}{b}+\mu_z,$$

cela donnera la plus forte tension de l'air comprimé dans les cas où le volume b des réservoirs est déterminé; mais cela à condition que cette tension μ_s sera toutefois suffisante pour gravir les plus fortes pentes, même après la diminution qu'elle a éprouvée jusqu'aux endroits de ces pentes.

B. Comme dans cette condition, la masse d'air S ne dépend nullement de μ_s, mais uniquement des pentes de la voie et du poids du train, on voit par les formules (552 et 553) que le volume b des réservoirs pour une tension μ_s déterminée, aussi bien que cette tension pour un b donné, est d'autant plus petit que S l'est. Or S est d'autant moindre que l'est la partie $k = \frac{\lambda}{1+\mu_1}$ de la course λ des pistons propulsifs de la locomotive pendant laquelle on laisse l'air comprimé s'introduire dans les cylindres de propulsion: donc on voit que les locomotives à air de *seconde* sorte sont ici à leur place. Aussi la valeur de S, comme le fait voir (440), sera-t-elle d'autant moindre que les dimensions Δ et λ des cylindres de propulsion le seront, et que le diamètre D des roues de propulsion de la locomotive sera plus grand. Quant à μ_1, il ne faut pas lui donner une valeur aussi grande, que la tension μ_m nécessaire pour les plus fortes pentes, devienne plus grande que la tension μ_s.

C. C'est la tension $1+\mu_z$ restée à l'air comprimé dans les réservoirs à la fin d'une course, que les machines pneumatiques auront à réelever à la tension $1+\mu_s$. A cela une force de

$$554. \quad m = \frac{\sigma b(\mu_s^2-\mu_z^2)}{2t\varphi} \text{ chevaux}$$

est nécessaire suivant (534). Mettant dans cette expression celle de b (552), on obtient

$$555. \quad m = \frac{\sigma(\mu_s^2-\mu_z^2)}{2t\varphi}\cdot\frac{S}{\mu_s-\mu_z} = \frac{S\sigma(\mu_s+\mu_z)}{2t\varphi}.$$

Les machines pneumatiques pourront ici fonctionner absolument sans interruption, jour et nuit. Pendant les nuits, elles pourront produire de réserves pour des courses extraordinaires. Donc, si ν courses doivent être faites en 24 heures, les machines pneumatiques doivent avoir la force d'élever la tension $1+\mu_z$ de l'air dans les réservoirs de ν locomotives, à celle $1+\mu_s$ dans

$$556. \quad T = 24\cdot 60\cdot 60 = 86400 \text{ secondes:}$$

donc il leur faut la force de

$$557. \quad m = \frac{\sigma\nu b(\mu_s^2-\mu_z^2)}{2T\varphi} \text{ chevaux}$$

suivant (554), ou bien de

$$558. \qquad m = \frac{\sigma v S(\mu_s + \mu_z)}{2 T \varphi} \text{ chevaux}$$

suivant (555).

D. Maintenant on pourra plus ou moins disposer du nombre ν des courses par jour, au moyen de la fixation de l'importance des trains.

L'expression (440) donne pour la distance L et pour la pente β,

$$559. \qquad S = \frac{L}{1+\log \text{nat}\,(1+\mu_1)}\left(\frac{Q}{\sigma}(n+\text{tang}\,\beta)+\frac{\Delta^2\lambda}{D}\right).$$

Donc, si le poids total à transporter pendant 24 heures est νQ, et que ce poids doive être transporté par ν courses, on aura

$$560. \qquad \nu S = \frac{L}{1+\log \text{nat}\,(1+\mu_1)}\left(\frac{\nu Q}{\sigma}(n+\text{tang}\,\beta)+\frac{\nu\Delta^2\lambda}{D}\right).$$

Si au contraire le poids νQ doit être transporté par ν_1 courses, de $\frac{\nu}{\nu_1} Q$ kilogr. chacune, et qu'on désigne par S_1 la masse d'air nécessaire pour une course, on aura

$$561. \qquad \nu_1 S_1 = \frac{\nu_1 L}{1+\log \text{nat}\,(1+\mu_1)}\left(\frac{\nu}{\nu_1}\cdot\frac{Q}{\sigma}(n+\text{tang}\,\beta)+\frac{\Delta^2\lambda}{D}\right)$$

$$= \frac{L}{1+\log \text{nat}\,(1+\mu_1)}\left(\frac{\nu Q}{\sigma}(n+\text{tang}\,\beta)+\frac{\nu_1\Delta^2\lambda}{D}\right).$$

Comme on le voit par les expressions (560 et 561), $\nu_1 S_1$ est généralement plus grand que νS, si ν_1 est plus grand que ν. Mais si un poids $\frac{\nu}{\nu_1} Q$, moindre que Q, est à transporter, on aura besoin de moins de force de traction, et on pourra par conséquent donner aux cylindres de propulsion des dimensions Δ_1 et λ_1 moins fortes que celles Δ et λ, de sorte que $\nu_1 \frac{\Delta_1^2 \lambda_1}{D}$ n'est plus supérieur à $\nu \frac{\Delta^2 \lambda}{D}$ et qu'à la fin la valeur de m (558) pour ν_1 courses, ne surpasse plus celle pour ν courses.

E. Donc ici plusieurs courses de moindres trains ne coûteront pas plus que moins de courses de gros trains. Et cela présente plusieurs avantages.

Premièrement. Les courses plus fréquentes seront en elles-mêmes plus avantageuses pour le service du chemin de fer. Car à quoi sert la grande vitesse du train, si les personnes et les marchandises à transporter, doivent attendre le *départ* du train pendant plusieurs heures? En se servant de chevaux, on peut partir à chaque moment.

Secondement. A des trains moins lourds suffisent des locomotives moins fortes, des rails moins pesants, et une construction de la voie moins *coûteuse*.

Troisièmement. Une tension μ_s moindre de l'air comprimé est moins ***dangereuse*** qu'une tension plus forte.

J'ai demontré plus en détail (Tome 17 de mon journal des constructions pages 172 §. 17) les grands avantages des courses ***plus fréquentes*** et à trains moins lourds sur les chemins de fer. Ces avantages existent déjà pour les locomotives à ***vapeur***. Ici, pour les locomotives ***à air,*** ils seront encore plus sensibles. Il est vrai que si sur des routes déjà très-fréquentées, on voulait encore augmenter le nombre des courses, une ***seule*** voie de rails ne suffirait guère plus. Mais si même les évitements bien disposés ne suffisaient plus pour épargner une seconde voie: deux voies, avec des rails moins pesants, ne coûteront guère davantage qu'une seule voie à rails forts, surtout dans le cas de locomotives ***à air,*** où l'on n'est pas forcé d'établir des ***pentes faibles,*** qui pour les locomotives ***à vapeur*** exigent quelquefois des terrassements énormes. Nous en donnerons plus bas un exemple.

F. En déterminant le ***volume b*** des réservoirs d'air, soit arbitrairement, soit d'après (552), conforme à la tension fixée μ_s de l'air, il se présente deux questions, savoir: si les cylindres à air pourront encore être commodément ***placés*** sur la locomotive et sur son tender, et si la locomotive ne deviendra pas ***trop,*** ou ***trop peu*** pesante par cette charge.

Désignons comme dans (§. 21) par δ le diamètre d'un cylindre à extrémités demi-sphériques, par l sa longueur, les deux demi-sphères y comprises, son volume par b_1, sa surface par f_1: on a suivant (50)

$$562. \quad b_1 = \tfrac{1}{12}\pi\delta^2(3l-\delta) \text{ et}$$

$$563. \quad f_1 = \pi\delta l:$$

donc le ***nombre*** des cylindres nécessaires pour fournir le volume b est

$$564. \quad \frac{b}{b_1} = \frac{b}{\frac{1}{12}\pi\delta^2(3l-\delta)}.$$

La force expansive qu'exerce l'air dans le cylindre, comprimé jusqu'à la tension $(1+\mu_\sigma)$, prise pour l'unité de la longueur, est $=\sigma\mu_s\delta$, et la solidité des parois du cylindre doit pouvoir résister au ***triple*** de cette force. Soit d l'épaisseur des parois, et e la cohésion du fer sur le carré de l'unité de la mesure, la résistance des parois du cylindre, prise également pour l'unité de la longueur, est $=2de$. Cette résistance doit être égale à la force expansive $3\sigma\mu_s\delta$, donc on a

$$565. \quad 2de = 3\sigma\mu_s\delta,$$

et de là on tire

$$566. \quad d = \frac{3\sigma\mu_s\delta}{2e}.$$

La masse de fer contenue dans les parois du cylindre dont la surface était $\pi\delta l$ (563), est donc

$$567. \quad \pi d\delta l = \frac{3\pi\sigma\mu_s\delta^2 l}{2e},$$

et en désignant par w le poids de l'unité cube du fer, on obtient pour le poids *d'un* cylindre:

$$568. \quad \pi d\delta l w = \frac{3\pi\sigma\mu_s\delta^2 l w}{2e};$$

donc, si G désigne le poids des $\frac{b}{b_1}$ cylindres nécessaires (564), on aura

$$569. \quad G = \pi d\delta l w \frac{b}{b_1} = \frac{3\pi\sigma\mu_s\delta^2 l w}{2e} \cdot \frac{b}{\frac{1}{12}\pi\delta^2(3l-\delta)} = \frac{18\sigma\mu_s b l w}{e(3l-\delta)}.$$

G. A ce poids il faudra ajouter celui de la machine elle-même, ainsi que celui des autres réservoirs qui, suivant (§. 14), seront nécessaires, tant pour recevoir l'air que la machine pendant la course pourra peut-être puiser de l'atmosphère et le comprimer, que pour servir de médiateur entre les réservoirs principaux et les cylindres de propulsion; et enfin le poids A de l'air comprimé *même* qui, en désignant par a le poids d'un mètre cube d'air atmosphérique, est

$$570. \quad A = b\mu_o a.$$

H. Il est à observer qu'on ne sera nullement forcé de placer *tous* les cylindres-réservoirs sur la locomotive même: au contraire on n'en aura à y placer précisément que le nombre suffisant pour donner à la locomotive le poids nécessaire produisant par les roues de propulsion le frottement sur les rails, que la force de traction exige. Le reste des cylindres pourra être placé sur un ou deux autres wagons qui suivent la locomotive, comme le tender chargé des cokes et de l'eau de provision suit une locomotive à vapeur. On pourra conduire dans la machine, l'air des cylindres placés sur les autres wagons, par des tubes flexibles. A la rigueur, il ne faudra à une locomotive à air que le poids de la *machine elle-même*, qui ne devra pas être au dessus de 5000 kilogr., c'est-à-dire non point au dessus du poids d'un wagon ordinaire, chargé de personnes ou de marchandises, de sorte qu'ici, même dans le cas où l'on veut transporter des gros trains, les rails de la voie pourront être moins pesants que sur les chemins de fer à locomotives à vapeur. Là, la machine de traction pésera toujours 10000 à 15000 kilogr., quand même

ce poids ne serait pas nécessaire pour produire sur les rails le frottement des roues de propulsion, exigé par la force de traction. Ici le poids de la locomotive ne dépend presque que de la force seule de traction.

Nous passerons maintenant à un exemple, et nous choisirons encore celui du chemin de fer de Berlin à Potsdam.

Exemple pour le système N°. V §. 4, et calculs des frais de construction, d'entretien et d'exploitation dans ce cas.

67.

A. Nous supposerons le poids Q du train des wagons, y compris la locomotive, $= 92770$ kilogr., comme ci-dessus. Les dimensions des cylindres de propulsion doivent être $\Delta = 31{,}4$ et $\lambda = 41{,}8$ centim. L'air comprimé doit être introduit dans ces cylindres pendant la 4me partie de la course des pistons, de sorte que $k = \frac{\lambda}{1+\mu_1} = \frac{\lambda}{4}$, et par conséquent $\mu_1 = 3$. Le diamètre D des roues de propulsion doit être $= 1{,}57$ mèt.

a. Alors la masse d'air atm. que consommera la locomotive pendant un trajet, sera suivant (546)

571. $S = 742$ mèt. cub.

La tension qu'il faut à l'air comprimé à la fin du trajet, est suivant (543)

572. $\mu_z = 3{,}191.$

Cela substitué dans (552) donne les volumes suivants des cylindres réservoirs:

573.

pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	atm.
$b =$	57,90	62,82	68,63	75,61	84,21	94,97	108,92	127,68	154,23	mèt. cub.

b. En supposant le diamètre des cylindres-réservoirs $\delta = 0{,}6277$ mèt., leur longueur $l = 6{,}277$ mèt., le volume d'un cylindre est suivant (562)

574. $b_1 = 1{,}878$ mèt. cub.;

donc le nombre des cylindres nécessaires est en vertu de (573):

575.

pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	atm.
$\frac{b}{b_1} =$	31	34	37	41	45	51	58	68	83	

c. En supposant la cohésion e du fer par centim. carré $= 4794{,}6$ kilogr. (§. 21), la formule (566) donnera pour l'épaisseur des parois des cylindres:

576.

pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	atm.
$d =$	2,96	2,77	2,59	2,40	2,22	2,03	1,85	1,66	1,48	millim.

d. Le poids G de la totalité des cylindres-réservoirs sera suivant (569)

577. $\left\{\begin{array}{l} G = \\ \text{pour } \mu_s = \end{array}\right.$ 9255 9380 9586 9792 10102 10411 10875 11442 12318 kilogr.
16 15 14 13 12 11 10 9 8 atm.

e. Le poids A de la masse d'air comprimé dans les cylindres, en supposant $= 1{,}263$ kilogr. le poids a d'un mètre cub. d'air atm., est suivant (573 et 570)

578. $\left\{\begin{array}{l} A = \\ \text{pour } \mu_s = \end{array}\right.$ 1170 1190 1213 1242 1276 1319 1371 1451 1558 kilogr.
16 15 14 13 12 11 10 9 8 atm.

f. En supposant le poids des roues et essieux de la locomotive, et celui de la machine elle-même etc. $= 5154$ kilogr. pour la plus faible tension de l'air, et encore 206 kilogr. pour chaque atmosphère de plus, le poids total E de la machine de traction se trouvera par (577 et 578) être

579. $\left\{\begin{array}{l} E = \\ \text{pour } \mu_s = \end{array}\right.$ 17227 17166 17189 17218 17356 17502 17812 18253 19030 kilogr.
16 15 14 13 12 11 10 9 8 atm.

g. Donc, dans tous les cas, le poids de la machine de traction ne surpassera guère celui d'une forte locomotive *à vapeur* avec son tender. Comme le frottement des roues de propulsion sur les rails, nécessaire pour servir de point d'appui à la force de traction, est bien au-dessous du poids de la machine de traction, on pourra répartir les cylindres-réservoirs sur deux et même sur trois wagons. Car la force nécessaire de traction est

580. $Z = Q(n + \text{tang}\beta)$ (103).

Cela donne, Q étant 92770 kilogr. et $\text{tang}\beta = 0{,}333\ldots$,

581. $Z = 680$ kilogr.,

donc un poids de 5000 kilogr. tout au plus, pesant sur les roues de propulsion, suffira pour produire le frottement nécessaire, et par conséquent les cylindres-réservoirs pourront être repartis sur deux et même sur trois wagons. Et sur trois wagons les 83 cylindres nécessaires pour la tension de 8 atm. (575) pourront encore être commodément *placés*, par ex. 13 cylindres sur le wagon de la machine même, et 35 cylindres sur chacun des deux autres wagons, en 7 rangs, l'un sur l'autre, et chaque rang de 5 cylindres. Il est vrai que la répartition des cylindres sur plusieurs wagons causera encore quelque augmentation du poids de la machine de traction, cependant le poids total ne dépassera pas 20000 kilogr., de sorte qu'en tous cas, environ le poids de 72000 kilogr. d'un train de marchandises ou de personnes pourra être transporté.

h. La force de chevaux nécessaire aux machines pneumatiques, qui ici pourront fonctionner jour et nuit sans interruption, calculée suivant les for-

mules (558 et 556) et avec un supplément de 10 pour cent, se trouvera pour 12 courses en 24 heures, être celle de

582.

$m =$	174	165	156	148	138	129	120	111	101	chevaux
pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	atm.

i. Supposons = 2,13 fr. le prix d'un kilogramme de la tôle employée dans la construction les cylindres, et 22500 fr. celui d'une locomotive propre à la plus faible tension de l'air comprimé, savoir de 8 atm. Ajoutons y 750 fr. pour chaque atm. de plus. Puis soit le prix des plus fortes machines à vapeur destinées aux *pompes,* de 900 fr. par cheval, et 18,75 fr. de plus par cheval et par atm. pour les machines plus faibles; enfin soit le prix des machines pneumatiques 375 fr. par cheval. Supposons 15 locomotives, avec leurs cylindres, pour faire le service des 12 courses en 24 heures. Cela donnera les sommes suivantes des frais *d'établissement* des machines:

583.

Pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8 atm.
1. Coût des cylindres	295350	300300	306900	313500	323400	333300	348150	366300	394350 fr.
2. Coût des locomotives	427500	416250	405000	393750	382500	371250	360000	348750	337500 fr.
3. Coût des mach. à vap.	156600	151594	146250	141525	134550	128194	121500	114469	106050 fr.
4. Coût des mach. pneum.	65250	61875	58500	55500	51750	48375	45000	41662	39000 fr.
Total des frais	944700	930019	916650	904275	892200	881119	874650	871181	876900 fr.

k. Les frais de ***chauffage*** des machines à vapeur pourront être évalués à 675 fr. par an et par cheval pour les machines les plus fortes, et à 900 fr. pour les machines les plus faibles. Cela donne suivant (582)

584.

Frais de chauffage	117450	115876	114075	112387	108675	105214	101250	96780	90900 fr.
pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8 atm.

Ces frais de chauffage, de 90 900 fr. pour 8 atm., sont à-peu-près les mêmes que ceux des locomotives à ***vapeur,*** chauffées par les cokes. Le prix de 876 900 fr. des locomotives à air, avec leurs cylindres et pompes, est à la vérité un peu plus élevé que celui des 15 locomotives à vapeur, qui avec leurs wagons de munition ne coûteraient que 787 500 fr., mais en revanche les locomotives à air seront plus durables que celles à vapeur et exigeront moins de frais d'entretien.

l. Pour les machines à vapeur ***stationnaires,*** on évalue par an les frais d'entretient et de rétablissement à 8 pour cent des frais de construction: ces frais seront au moins de 10 pour cent pour les ***locomotives*** à vapeur. Nous les évaluerons à 6 pour cent pour les ***locomotives à air.*** Les cylindres-réservoirs dureront très-longtemps, et nous supposerons 1 pour cent de leur

frais de construction pour frais d'entretien et de rétablissement. En calculant suivant ces principes, on trouvera

585.

Frais d'entretien et de rétablissement des locomotives etc.	45049	43819	42578	42536	40050	38842	37500	36322	34950 fr.
pour $\mu_s =$	16	15	14	13	12	11	10	9	8 atm.

Les frais d'entretien et de rétablissement des locomotives à vapeur, étant de 10 pour cent de 787 500 fr., c'est-à-dire 78 750 fr., surpasseraient de beaucoup ceux des locomotives à air avec leurs appartenances.

m. Comme tous les frais calculés ci-dessus sont les moindres pour la *moindre* tension de l'air comprimé de 8 atm., cette tension sera la plus avantageuse, bien que par elle un poids un peu moindre de voitures de marchandises ou de personnes soit transporté. La plus faible tension est déjà préférable à de plus fortes tensions, à cause du moins de dangers d'explosion. Ce danger n'existe plus pour 8 atm., parcequ'elle n'est pas à craindre même pour les *chaudières à vapeur*.

n. Donc il faudrait au chemin de fer de Berlin à Potsdam deux machines à vapeur fonctionnant aux pompes (582), chacune de la force de 51 chevaux; elles fonctionneraient jour et nuit, sans interruption. On en placerait une à Berlin, l'autre à Potsdam, et alors les locomotives à air pourraient faire 12 courses en 24 heures et transporter à chaque course environ 72 000 kilogr., c'est-à-dire 14 à 16 voitures de personnes ou de marchandises.

o. Il existe auprès de Potsdam un fort *courant d'eau*, employé pour faire marcher des moulins. Je n'ai pas mesuré la force de ce courant d'eau, mais il est très-probable, qu'elle est supérieure à celle de 101 chevaux. Aussi les occasions ne manquent-elles pas le long de la voie pour utiliser la force du *vent* en supplément à la force de l'eau. Donc probablement la force de *vapeur* ne serait pas du tout nécessaire au chemin de fer de Berlin à Potsdam. On y pourrait ne s'y servir que de la force de l'eau et de celle du vent, par conséquent en éloigner absolument le *feu*, tandis que cette autre force coûterait assurément moins que celle de la vapeur.

B. Voyons encore, quels sont les résultats du calcul, si au lieu de gros trains on suppose suivant (§. 66. *E.*) des trains plus faibles, comme cela est avantageux par les raisons indiquées à l'endroit cité. Nous supposerons des trains de la *moitie* du poids, et comme on a déjà vu que les *moindres* tensions de l'air sont les plus avantageuses, nous supposerons d'abord une tension de $\mu_s = 8$ atm. Les dimensions des cylindres et des roues de propulsion

doivent être ici $\Delta = 23{,}5$, $\lambda = 31{,}4$ et $D = 157$ centimètres. La valeur de μ_1 ne sera ici supposée que $\mu_1 = 2$, à cause de la longueur moindre des cylindres, de sorte que l'entrée de l'air comprimé dans les cylindres de propulsion sera interceptée ici après 10,4 centim. de course des pistons.

En calculant d'après ces données, on trouvera les résultats suivants

586.
1. Masse d'air nécessaire pour *une* course, suivant (538), $S = 397$ mèt. cub.
2. Tension de l'air à la fin du trajet, suivant (§. 64. *B.*), $\mu_z = 2{,}973$.
3. Volume des réservoirs d'air comprimé, suivant (552), $b = 79$ mèt. cub.
4. Nombres des cylindres-réservoirs, suivant (577), $\frac{b}{b_1} = 42$.
5. Epaisseur des parois des cylindres, suivant (569), $d = 1{,}48$ millim.
6. Poids des cylindres-réservoirs, suivant (572), . $G = 6185$ kilogr.
7. Poids de l'air comprimé, suivant (576 et 573), . $A = 824$ kilogr.
8. Poids total de la machine de traction, suivant (*A. f.*), $E = 12163$ kilogr.
9. Force de traction, suivant (583), ... $Z = 340$ kilogr.
10. La force des machines aux pompes (555) doit être de $m = 107$ chevaux.
11. Montant des frais d'établissement de toute la machinerie 1 056 225 francs.
12. Montant des frais d'entretien . . . . . 45 606 francs.

Donc les frais d'établissement et d'entretien sont ici un peu plus élevés que ci-dessus pour les gros trains, mais les petits trains auront en compensation les avantages énumérés ci-dessus (§. 66. *E.*).

C. La distance de 26 363 mèt. de Berlin à Potsdam, que les trains ont à parcourir *sans s'arrêter*, est extraordinairement longue. Il n'est pas *nécessaire* de s'arrêter entre Berlin et Potsdam, bien qu'on le fasse quelquefois. Mais les cas où la *nécessité* de s'arrêter n'existe pas à une distance si considérable, sont très-rares. Ordinairement les distances n'ont que la *moitié* de longueur de celle-ci. D'ailleurs le temps nécessaire pour changer de locomotives est si court, que le changement des machines, même dans les cas où l'on n'est pas, par quelque autre raison, dans la nécessité de s'arrêter, n'est guère un inconvénient. Pour les locomotives à air le changement des machines serait très-utile, parcequ'alors elles auraient moins d'air comprimé à transporter. Il est vrai que si l'on veut diviser la distance en deux, un nombre double de machines est nécessaire, mais les machines pourront être moins fortes et moins pesantes; la construction de la voie elle-même pourra être moins forte et moins coûteuse, et on pourra transporter par la même force

un peu plus de charge utile. Les frais d'établissement et d'entretien de la machinerie seront à peu près les mêmes.

Comparaison des frais d'établissement, d'entretien et d'exploitation d'un chemin de fer dans les cinq différents systèmes.

68.

Nous allons comparer maintenant entre eux les cinq systèmes (§. 4), en appliquant à chacun d'eux l'exemple du chemin de fer de Berlin à Potsdam. Cet exemple surtout conduira à rechercher la question de savoir si même dans les cas qui ne présentent pas des difficultés extraordinaires, les systèmes à tuyau de propulsion, placé entre les rails, sont ou non preférables aux autres.

Comme les frais de construction d'entretien et d'exploitation du système N°. V, appliqué à l'exemple précité, ont été déjà calculés complètement dans le §. 67, et comme on y a supposé que le poids *total* de chacun des douze trains par jour doit être de 92 770 kilogr. (dont il faut déduire le poids de la machine de traction de 19 030 kilogr. (579)), nous supposerons, qu'également dans les autres systèmes, un train de wagons chargé de personnes ou de marchandises pesant $92770 - 19030 = 73740$ kilogr., doit être transporté à chaque trajet.

Nous supposerons des réservoirs stationnaires, séparés du tube de propulsion, pour les trois premiers systèmes, parceque les avantages de ces réservoirs ont été suffisamment démontrés plus haut.

Pour les quatre premiers systèmes, surtout si l'on admet des réservoirs séparés, il sera presque égal, (quant à la force motrice) de placer les machines pneumatiques aux deux extrémités de la voie et de donner au tube de propulsion entre les rails la longueur de toute la voie, ou de diviser ce tube en plusieurs sections et de placer les pompes le long de la voie en 4 ou 5 endroits différents. Probablement, suivant les expériences faites jusqu'ici, et les principes fondés sur ces expériences, on adopterait la dernière disposition, bien que les passages d'un tube à l'autre présentent des difficultés et des dangers notables, et que la division du tube en plusieurs sections occasionne plus de dépenses.

Nous supprimons ici les calculs purement techniques qui suivent, et qui n'intéresseraient pas assez les lecteurs de ce journal. Nous n'en présenterons que les résultats.

f. Tableau des frais de construction, d'exploitation et d'entretien des cinq systèmes, comparés au système à locomotives à vapeur.

74.

A. Ce tableau des résultats des calculs (§. 69 — 73) est le suivant.

Si la voie de Berlin à Potsdam, au lieu d'être construite pour l'usage des *locomotives à vapeur*, était construite dans l'un ou l'autre des cinq systèmes décrits ci-dessus:

		Les frais de construction	Les frais annuels d'exploitation et d'entretien
		différeraient de ceux de la voie à locomotives à vapeur	
611.	1. Dans le système N°. I, à air raréfié, ou dans le système atmosphérique proprement dit (§. 69, 598 et 599), de	+1416562 fr.	+ 75544 fr.
	2. Dans le système N°. II, à air comprimé dans un tube de propulsion placé entre les rails et avec piston et rainure (§. 70, 603 et 604), de	+1711312 -	+ 35797 -
	3. Dans le système N°. III, à air comprimé dans un tube de propulsion sans piston ni rainure (§. 71), de	+3125313 -	+ 49937 -
	4. Dans le système N°. IV, à air comprimé dans un réservoir placé entre les rails et à locomotives à air (§. 72, 607 et 608), de	+1655550 -	+307800 -
	5. Dans le système N°. V, à locomotives à air et sans tuyau placé entre les rails (§. 73, 609 et 610), de	— 285600 -	— 54150 -

On voit par ce tableau que le système N°. V, *quant aux frais* de construction, d'exploitation et d'entretien, est le plus avantageux de tous. Tous les autres systèmes coûteront plus que le système ordinaire à locomotives à vapeur; le système N°. V seul coûtera moins.

Je suis bien loin de soutenir que les calculs des frais ci-dessus sont absolument sûrs; au contraire je conviens que beaucoup de circonstances locales pourront encore modifier et changer très-considérablement les résultats; mais comme les frais des quatre premiers systèmes suivant nos calculs excèdent ceux d'un chemins de fer à vapeur de sommes si *énormes*, qu'outre cela les calculs des quatre systèmes ont été faits plutôt en leur faveur qu'à leur désavantage, et que plusieurs objets qui occasionnent encore des dépenses dans les quatre

premiers systèmes, par ex. les bâtiments pour les machines, les frais de service des machines etc. ont été négligés entièrement, il parait au moins *sûr* et incontestable, que les quatre premiers systèmes ne pourront jamais être *moins* chers que le système à locomotives à vapeur.

B. La seule circonstance qui pourrait encore soulever des doutes sur l'économie du ***cinquième*** système est, que les locomotives à air de ***seconde*** sorte, que nous avons supposées dans nos calculs, sont encore des machines si nouvelles et si inusitées, que leurs avantages, et même leur possibilité, pourraient être révoqués en doute, et qu'on pourrait craindre d'être forcé de se contenter des locomotives à air de ***première*** sorte, sans détente, dont la possibilité et l'emploi sont ***indubitables.***

Pour voir quels sont les résultats dans le cas de l'emploi des locomotives à air de ***première*** sorte, nous ferons encore les calculs relatifs à ce cas.

a. Puisqu'il s'agit d'abord de diminuer autant que possible la masse d'air comprimé S dans les cylindres-réservoirs mobiles, nous donnerons aux locomotives des ***petits*** cylindres de propulsion, du diamètre Δ de 23,5 et de la longueur λ de 31,4 centimètres. Et comme il s'agit également de diminuer autant que possible la force nécessaire pour comprimer l'air, nous conserverons la supposition ci-dessus d'une tension effective de l'air de 8 atm., qui d'ailleurs est préférable à une plus forte tension, à cause du moindre danger d'explosion. Mais comme toutefois une plus grande masse d'air que dans le cas des locomotives de ***seconde*** sorte, sera à transporter par la machine, et que par conséquent le poids du train augmentera, nous aurons à supposer ce poids $Q = 103\,079$ kil. (2000 quintaux de Prusse), au lieu de 92 770 kil. supposés ci-dessus. Alors le poids des voitures chargées de marchandises ou de personnes, dont il s'agit, sera à peu près égal à celui ci-dessus.

b. En supposant $Q = 103\,079$ kilogr., on obtient par la formule (219)

612. $\quad S = 1484$ mèt. cub.

c. La tension μ_z de l'air comprimé, nécessaire sur la partie ***horizontale*** à l'extrémité de la voie, est suivant la formule (541):

$$613. \qquad \mu_z = \frac{QD_n}{\Delta^2 \lambda \sigma} = 3{,}95 \text{ atm.}$$

Mais il faut considérer que la moitié de la voie, que nous avons prise pour exemple, a des pentes déjà si raides, que sur ces pentes, la ***moitié*** $\frac{1}{2}\mu_z$ de la tension nécessaire sur une voie horizontale suffit, de sorte que la moitié du volume des réservoirs pourra être épuisée jusqu'à la tension $\frac{1}{2}\mu_z$, et que par

conséquent une tension finale de

614. $\mu_z = \frac{3}{4} \cdot 3{,}95 = 2{,}96$ atm.

suffira, en la supposant pour le volume total des réservoirs.

On doit remarquer ici, en passant, que cette circonstance aura également lieu dans le cas de locomotives de ***seconde*** sorte ci-dessus; et elle rendra encore beaucoup plus favorables les résultats obtenus pour ce cas.

d. En supposant maintenant $\mu_z = 2{,}96$ et $\mu_s = 8$, la formule (552) donne pour le volume nécessaire des cylindres-réservoirs:

615. $$b = \frac{S}{\mu_s - \mu_z} = 294 \text{ mèt. cub.},$$

et comme le volume b_1 de chaque cylindre est de 1,878 mèt. cub. (574), le nombre des cylindres nécessaires sera

616. $$\frac{b}{b_1} = 157.$$

e. Ces cylindres péseront suivant (569)	23 296 kilogr.
L'air qu'ils renferment pésera suivant (570)	2 938 –
Ajoutons y pour le poids de la machine, suivant (§. 67. *A. f.*),	5 154 –
Cela donne pour le poids total de la machine de traction	31 388 kilogr.
de sorte que ce poids, retranché du poids total du train de	103 079 –
supposé dans (*a.*), laisse un poids de	71 691 kilogr.

pour les voitures de marchandises et de personnes, qui à peu près est le même que celui supposé pour les locomotives de seconde sorte.

f. Le nombre des chevaux, dont la force est nécessaire aux pompes, en y ajoutant 10 pour cent, est suivant (558)

617. $$m = \frac{\sigma v S(\mu_s + \mu_z)}{2 T \varphi} \cdot \frac{11}{10} = 199.$$

g. Les cylindres-réservoirs pour 15 locomotives à air coûteront suivant (§. 67. *A. h.*)	745 800 fr.
Les locomotives elles mêmes coûteront suivant (583. 2.) . .	337 500 –
Les machines à vapeur, de la force de 199 chevaux, coûteront suivant (§. 67. *A. h.*)	208 950 –
Les pompes à air coûteront	74 625 –
Total	1 366 875 fr.
A déduire pour les locomotives à vapeur etc. suivant (§. 73. *A.*)	1 162 500 fr.
618. Reste un ***excédant*** des frais de la voie à locomotives à air de ***première*** sorte	204 375 fr.

h. Les dépenses annuelles seront:

Frais de chauffage des machines à vapeur de la force de 199 chevaux, à 675 fr. par cheval, parceque les machines pourront être ici d'un plus gros calibre	134 325 fr.
Frais d'entretien des cylindres à air, à 1 p. c., ...	7 458 -
Idem des locomotives, à 6 p. c., ...	20 250 -
Idem des machines à vapeur, à 8 p. c., ...	16 717 -
Idem des machines pneumatiques, à 6 p. c., ...	4 478 -
Total	183 228 fr.
Les dépenses annuelles sur la voie à vapeur sont suivant (§. 73. *B.*)	168 750 -
619. Donc la voie à locomotives à air de première sorte exigera un ***surplus*** de dépenses annuelles de . .	14 478 fr.

C. Donc, si l'on voulait se servir de locomotives à air de ***première*** sorte, le système No. V exigerait en vérité de ***plus fortes*** dépenses de construction, d'exploitation et d'entretien que le système ordinaire à vapeur, mais ce surplus ne serait pas considérable, et il serait toutefois bien au dessous de celui (611. 1.) qu'exigerait le système atmosphérique proprement dit. Mais comme la perte de force utile, dans les locomotives à air de première sorte, qui laissent s'échapper dans l'atmosphère un air comprimé, qui ici a encore une tension de 3, 4 à 5 atm., est si évidente et si considérable, on se gardera bien, sans doute, de faire usage de ces machines, et le calcul relatif à leur emploi ne vient autrement en considération que pour faire voir que, même en employant des machines très-désavantageuses, les frais de construction, d'exploitation et d'entretien des voies à locomotives à air, ne dépasseraient encore que peu, ceux du système ordinaire à vapeur. On profitera toujours de ***quelque détente*** dans les cylindres de propulsion, et, comme il est connu déjà par les ***machines à vapeur***, cette détente offre d'abord une économie sur la force motrice, de 30, 40 à 50 pour cent.

Donc effectivement les résultats ci-dessus, relatifs aux locomotives à air de ***seconde*** sorte, sont plus exacts; et toutefois ils font voir que dans les cas ordinaires, de terrains peu accidentés, les chemins de fer à locomotives à air n'exigeront ***pas plus*** de frais de construction, d'exploitation et d'entretien que les voies ordinaires à vapeur, tandis que, comme le fait voir (611), ils sont ***beaucoup*** plus coûteux, dans tous les quatre autres systèmes, que dans le système ordinaire. Dans des cas plus difficiles, où de fortes pentes sont à

gravir, le même résultat a lieu encore à plus forte raison, parceque les pentes ne sont pas défavorables au système N°. V, tandis qu'elles le sont à un haut degré dans tous les autres.

Comparaison des différents systèmes entre eux, relativement à leurs autres propriétés.

Nous supprimerons ces discussions purement techniques et nous n'en presenteront que les resumée succinct.

g. Récapitulation sommaire des résultats de la comparaison des cinq systèmes entre eux, et avec le système à locomotives à vapeur.

81.

On aura déjà remarqué dans les expositions qui précèdent que le système N°. V dans presque tous les points, a des préférences sur les quatre autres systèmes, ainsi que sur le système ordinaire à locomotives à vapeur. Pour justifier cela d'autant plus clairement, nous donnerons en peu de mots un resumé des comparaisons des différents systèmes, et cela en comparant particulièrement *le système V* avec les autres.

I. Dans le cas ordinaire, d'un terrain peu accidenté, comme celui entre Berlin et Potsdam, et par conséquent sur les lignes de grande étendue, les frais d'établissement, d'entretien et d'exploitation d'un chemin de fer, suivant le système N°. V, et à locomotives à air de la *seconde* sorte, seront suivant (§. 74. 611. 5.) *moindres* que ceux de la même voie dans le système ordinaire à locomotives à vapeur. En se servant des locomotives à air de la *première* sorte, le système N°. V sera à la vérité un peu plus cher que le système ordinaire, mais il n'y a pas de raisons suffisantes pour préférer les locomotives à air de la *première* sorte à celles de la *seconde.*

Tous les autres systèmes, et par conséquent aussi le système atmosphérique proprement dit, coûteront beaucoup plus à construire, à entretenir et à exploiter que celui N°. V, et l'excèdant des frais de construction sera *double, triple* et *quadruple* des frais des rails et de leurs appartenances.

Dans les cas extraordinaires, où l'usage des locomotives à vapeur n'est plus praticable, c'est-à-dire où il s'agit de gravir des rampes très-longues et très-hautes, le rapport des frais des systèmes N^{os} I, II, III, V à ceux du système ordinaire, peut être plus favorable pour les quatre premiers, mais les frais de *construction* de ces quatre systèmes ne seront guère dans aucun cas moindres que ceux du système N°. V, à cause du tube de propulsion, qui est si coûteux.

II. Tous les cinq systèmes ont parfaitement ***en commun*** les grandes préférences sur le système ordinaire à locomotives à vapeur, d'éloigner le *feu* de la voie, et d'admettre l'utilisation de la force de courants d'eau, où il en existe, et même de celle du vent, au moins comme auxiliaires. Sur ce point, le système N°. V n'a pas de préférences sur les quatre autres.

III. Dans les cas où il s'agit de gravir des rampes très-longues et très-raides, et où, dans le système ordinaire à locomotives à vapeur, on est forcé de se servir de machines stationnaires à la place de locomotives, le système atmosphérique proprement dit N°. I, n'est applicable que sous des conditions assez limitées. Déjà sur une rampe de 1 sur 40, le poids du train ne pourra guère dépasser 50 000 kilogr., et si l'on veut que ce poids monte à 77 000 kilogr., la rampe ne pourra être plus raide que 1 sur 68 (§. 75. ***B.***).

Les systèmes N°s II et III sont fort propres aux rampes longues et raides, surtout N°. II; mais les constructions seront alors très coûteuses (§. 75. ***C.***).

Le système N°. IV est tout à fait impropre dans ce cas (§. 75. ***E.***).

Le système N°. V est encore fort applicable à ce cas, en se servant du moyen (§. 58.), et il sera probablement réalisable à meilleur marché que tout autre.

Pour modérer la vitesse d'un train descendant une rampe raide, et pour l'arrêter, les cinq systèmes sont à peu près également propres; mais quand il s'agit seulement de ***modérer*** la vitesse, le système N°. V à quelque préférence sur les autres.

IV. Dans les cas, où la voie monte et descend alternativement, les systèmes IV et V, et surtout N°. V, ont de grandes préférences sur tous les autres, le système à vapeur y compris. Le vice fondamental et irrémédiable des systèmes N^os^ I, II, III, dans ces cas, est si grand, qu'ils y sont presque inapplicables, et que l'usage du système atmosphérique proprement dit, est presque borné au cas, où, comme à Dublin, la voie monte ***continuellement*** (§. 76).

V. Quant à la propriété d'engendrer de très-grandes ***vitesses*** du trajet, aucun système n'a une préférence sur l'autre.

VI. Quant à la ***sureté*** du trajet, les systèmes N^os^ I, II et IV ont cette préférence sur N°s III et V, et sur le système ordinaire à vapeur, que la tige de propulsion empèche de dérailler le wagon-conducteur, et encore un peu le wagon qui le suit immédiatement, mais non pas les autres wagons; cependant cette préférence n'est que de peu d'importance. Et en revanche N^os^ I, II, III, IV offrent plus de danger que N°. V dans les cas où un essieu ou une roue viendrait

à se briser pendant le trajet (§. 78. ***B.***). Puis les systèmes N^os^ I, II et IV, surtout N^os^ I et II, offrent beaucoup de dangers dans le passage du piston de propulsion d'un tube dans un autre. Ces dangers existent moins dans N°. III, et point du tout dans N°. V (§. 78. ***C.***). La préférence que les systèmes N^os^ I, II et IV semblent avoir sur les autres, en ce qu'un choc de deux trains qui se rencontrent n'y existe pas, est plus illusoire que réelle: car par les mêmes moyens de correspondance, qui sont indispensables dans les systèmes N^os^ I, II, IV, les dangers du choc pourront aussi être éloignés avec surété dans tous les autres systèmes. Le système atmosphérique proprement dit n'a aucune préférence en ce point sur les autres, et N°. V n'y est inférieur à aucun (§. 78. ***D.***).

Le wagon-conducteur des systèmes N^os^ I, II, III est à la vérité moins compliqué que celui des N°s IV et V; mais en revanche N°. V n'a pas de tube de propulsion, avec sa soupape longitudinale et son piston, dont la complication n'est pas moins grande: donc aussi sur ce point le système N°. V n'est pas inférieur aux autres (§. 78. ***E.***).

Enfin le système N°. V a en commun avec le système ordinaire à vapeur cette préférence sur les autres, que si le train est arrêté dans sa marche par quelque accident arrivé à la machinerie de propulsion, la continuation du mouvement n'exige pas l'emploi de ***chevaux***, comme dans les quatre systèmes N^os^ I, II, III et IV, mais elle peut être opérée par des ***locomotives*** (§. 78. ***F.***).

VII. Quant ***à l'économie*** sur ***les frais de construction*** d'un chemin de fer ordinaire à locomotives à vapeur, l'économie à atteindre, en ce que les rails avec leurs appartenances peuvent être moins forts que dans le système ordinaire, est presque commune à chacun des cinq systèmes; mais dans les systèmes N^os^ I, II, III et IV cette économie est ***absorbée*** amplement par les grands frais ***du tube de propulsion*** (§. 79. ***A.***).

Les cinq systèmes ont également presque en commun cette préférence sur le système ordinaire, que les ***ponts*** de la voie seront moins coûteux (§. 79. ***B.*** *a.* et *b.*). Mais l'épargne d'une seconde ***paire de rails*** n'est pas plus, et même moins admissible dans les systèmes N^os^ I, II, III, IV que dans celui N°. V et dans le système ordinaire (§. 79. ***B.*** *c.*).

Quant à l'admissibilité des pentes plus fortes que dans le système ordinaire: objet qui peut offrir des ***très-grandes*** économies, le système N°. V a une préférence incontestable et très-prononcée sur ***tous*** les autres.

Enfin, quant à l'économie qui souvent pourra être obtenue, et à un degré considérable, s'il est permis de donner aux courbes de la voie des rayons

moins grands que ceux que le système ordinaire nécessite: les préférences des systèmes N^os^ I, II et IV sont si éventuelles, qu'elles se réduisent presque à rien, tandis que N°. V peut obtenir ces préférences par les *mêmes* moyens qui servent à diminuer les rayons des courbures dans les autres systèmes (§. 79. *D.*).

Résultats généraux et définitifs.

82.

La conséquence finale de tout ce qui précède est, que le système N°. V, *à locomotive à air et sans tube de propulsion,* n'est inférieur aux quatre autres N^os^ I, II, III et IV que dans quelques points insignifiants, et en *aucun* point au système *ordinaire* à vapeur, tandis qu'il a des préférences si importantes et si décisives sur *tous* les autres systèmes (le système ordinaire à vapeur y compris), que selon mon opinion, on ne peut lui contester le mérite d'être *supérieur* à *tous* les systèmes dont il a pu être question jusqu'ici. On peut affirmer que c'est précisément ce même système (peut-être encore avec l'aide de celui N°. II, pour les cas des rampes longues et raides) qui le premier rendra les chemins de fer *généralement praticables* sans frais exorbitants, et on peut déclarer en même temps, que le système *atmosphérique* proprement dit est *loin de pouvoir jamais* atteindre ce but.

Je n'ignore pas que tous les calculs, sur lesquels sont fondés ces résultats définitifs, auront encore à subir des modifications très-considérables dans la pratique, dans quelques uns et même dans la plupart des points, quelque incontestables que soient d'ailleurs les principes d'où partent les calculs: mais comme nulle part nous n'avons calculé en *faveur* du système N°. V, mais plutôt en sa défavenr, et que d'un autre côté les différences des résultats que nous avons obtenus pour les différents systèmes, sont tellement grandes qu'il est presque impossible que les modifications, qu'auront encore à subir les résultats dans la pratique, puissent changer un *Plus* dans un *Minus,* il est peu probable que la *pratique* conduira à un résultat définitif *opposé* à celui des calculs ci-dessus.

Nous en tirerons donc la conclusion, qu'on ne saurait conseiller, de diriger exclusivement sur le système *atmosphérique proprement dit* les efforts si louables, qu'on fait actuellement pour perfectionner les chemins de fer, mais qu'au contraire on fera beaucoup mieux de s'occuper avec zèle de la mise à exécution et du perfectionnement du système N°. V *à locomotives à air et sans tube de propulsion.* Les frais *d'essai* seront pour ce système moindres que

ceux que le système atmosphérique exigerait; car pour faire des essais sur le système N°. V, il n'est pas nécessaire de construire un nouveau chemin de fer, destiné exclusivement à ces essais, comme cela a lieu pour le système atmosphérique: au contraire tout chemin de fer déjà existant, sera propre aux essais, et même on pourra changer des locomotives à vapeur en locomotives à air, pour découvrir d'abord les moyens propres à obtenir les préférences que les locomotives de la ***seconde*** sorte ont sur celles de la première sorte. Les essais, présentent-ils de bons résultats (et il n'y a presque pas de doute qu'ils en présenteront), les bénéfices en seront immenses. D'ailleurs personne ne perdra; tout gagnera; même les constructeurs de locomotives à vapeur ne perdront pas; ils construiront alors des locomotives à air, des machines à vapeur stationnaires et des machines pneumatiques, à la place des locomotives à vapeur. Les marchands de combustibles ne perdront rien non plus; car dans la plupart des cas on se servira de machines ***à vapeur*** pour comprimer l'air. Mais le profit pour les chemins de fer eux-mêmes, et par conséquent pour le public et pour les nations, sera immense; non seulement par l'économie de frais à faire dans les terrains difficiles et par l'éloignement du feu de la voie, mais surtout par ce que ce ne sera qu'alors que les chemins de fer seront exécutables ***partout,*** et dans ***tous*** les cas, sans frais disproportionnés. En ne renonçant pas aux chemins de fer à vapeur, ou en persistant à vouloir se servir des chemins atmosphériques, on s'expose à dissiper des millions, qu'on regrettera douloureusement, quand peut-être un jour les véritables et justes moyens de perfectionnement viendront revendiquer leurs droits.

Le but du présent mémoire, qui a coûté à son auteur bien de travaux préparatoires et beaucoup de peines, est de mettre dans tout son jour les avantages et les inconvénients des différentes manières de se servir de la tension de l'air comme force motrice sur les chemins de fer. Quant à lui, il ne forme d'autres voeux que de voir prendre en considération ce qu'il vient de présenter ci-dessus.

Berlin, Janvier 1845.

31.

De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae.

(Auct. ***E. E. Kummer,*** prof. math. Vratislaviae.)

Quum clarissimus ***Gauss*** disquisitiones suas arithmeticas edidisset, abhinc annos XLI, perpauci erant geometrae, qui profundissimas ejus cogitationes mathematicas mente capere possent, admirationes autem omnium effecerunt theoremata nova de divisionibus circuli geometrice perficiendis, exempli gratia in septendecim partes, quae omnibus patefecerat. Iis praesertim inventis clarissimis adducti geometrae in doctrinam numerorum, imprimis autem in opus illud Gaussianum, operam maximam impenderunt, sed paucis tantum successit incoeptum, rei ipsius enim difficultas eo augetur, quod in hoc libro omnia ita inter se cohaerent, ut these aliqua omissa, ea quae sequuntur vix perspici possint. Sero tandem, quum in Germania litterae mathematicae magis effloruissent, nonnulli exstiterunt qui ***Gaussii*** disquisitiones non solum penitus intelligerent, sed ipsi inventis novis doctrinam numerorum ulterius promoverent. Inter quos prae ceteris duo viri summi commemorandi sunt ***Jacobi*** et ***Lejeune Dirichlet,*** quorum inventa et methodi cum iis quae nos hac dissertatione tractabimus arcte connexa sunt. Cl. ***Jacobi*** pro residuis cubicis primus invenit reciprocitatis legem simplicissimam, qua totius huius doctrinae summa continetur, et Cl. ***Lejeune Dirichlet*** analysin quantitatum continuarum ad doctrinam numerorum tam prospero successu applicavit, ut omnium admirationem sibi pararet et nomen suum celeberrimum redderet. Disquisitiones, quas hactenus in publicum edidit, praecipue in residuis et formis quadraticis versantur, ideoque a nostris, quae de residuis cubicis instituemus, alienae videntur esse; nihilominus tamen confitemur in omnibus fere nos illius vestigia secutos esse. Magna enim residuorum cubicorum analogia est cum residuis quadraticis, praecipue numerorum formae $4n+1$, multaque theoremata et methodi, quae pro hisce locum habent, mutatis mutandis ad illa transferri possunt. Nuper etiam audivimus a geometra quodam Gallico ***Lebesque*** commentationem de residuis cubicis conscriptam esse, anno 1837, quam vero comparare non potuimus, praeterea de hac re in ***Crellii*** diario adnotationes nonnullae exstant minoris momenti, quarum auctores sunt viri clarissimi ***Clausen*** et ***Stern.***

§. 1.

Ante omnia notiones et propositiones nonnullae elementares de residuis cubicis nobis repetendae sunt, quibus disquisitiones nostrae nituntur. Quilibet numerus α, qui cubo alicui congruus est modulo p, numero primo formae $6n+1$, hujus numeri primi residuum cubicum appellatur, qui vero cubo congrui esse non possunt, appellantur nonresidua; sive si congruentia $x^3 \equiv k$, modulo p, radicem aliquam habet, est k residuum, si vero haec congruentia radicem nullam habet, est k nonresiduum numeri primi p. Quia numeri inter se congrui semper simul sunt residua, vel nonresidua, hic soli numeri modulo p minores considerandi sunt. Potestas $x^{\frac{1}{3}(p-1)}$ pro valoribus variis numeri x non nisi tria residua incongrua habet, quorum unum est unitas, alterum si ponitur $= f$, est tertium $\equiv f^2$ et $1+f+f^2 \equiv 0$. Eos numeros x, pro quibus est $x^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv 1$, per α, eos qui dant $x^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv f$, per β, et eos qui dant $x^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv f^2$ per γ designamus, quibus literis ubi opus erit indices addemus. Omnes numeri modulo p minores aequaliter inter has tres classes distributae inveniuntur, ita ut numerus ipsorum α sit $\frac{1}{3}(p-1)$, idemque numerus ipsorum β et γ. Si g est radix primitiva pro modulo p, residua potestatum $g^0, g^3, g^6, \ldots g^{p-4}$ cum numeris $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. consentiunt, residua potestatum $g^1, g^4, g^7, \ldots, g^{p-3}$ cum numeris $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$. et residua potestatum $g^2, g^5, g^8, \ldots. g^{p-2}$ cum numeris $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$. In serie numerorum $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. reperiuntur etiam $p-\alpha, p-\alpha_1, p-\alpha_2, \ldots$., qua de causa eos tantum numeros $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. cognovisse sufficit, qui minores sunt quam $\frac{1}{2}p$, cum quibus altera semissis simul data est, idem cadit in numeros $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$. nec non in numeros $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Seriei $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. termini unitate aucti: $\alpha+1, \alpha_1+1, \alpha_2+1, \ldots$. excepto ultimo, qui est p, cujus loco ponimus 1, omnes in aliqua serierum α, β, et γ reperiuntur, numerus eorum qui continentur in serie α sit a, eorum qui in serie β continentur $= b$, ceterorum qui in serie γ continentur $= c$. Numeri a, b, c hoc modo definiti satisfaciunt aequationibus duabus

$$a+b+c = \tfrac{1}{3}(p-1), \quad \text{et} \quad (6a-3b-3c-2)^2+27(c-b)^2 = 4p;$$

itaque posito $6a-3b-3c-2 = t$, $c-b = u$, est $4p = t^2+27u^2$, et quum numerus $4p$ unico tantum modo in hanc formam redigi possit, t et u, neglectis signis $\pm$, omnino determinati sunt, signum numeri t eo determinatur, quod $t = 6a-3b-3c-2$ esse debet numerus formae $3m+1$, sed signum numeri u hoc modo definiri nequit, quia nondum distinximus quaenam nonresiduorum cubicorum literis β et quae literis γ designandae sint; nam serie numerorum β permutata cum serie numerorum γ, signum numeri u simul mutatur. Hinc autem

nos serierum β, β_1, β_2, ... et γ, γ_1, γ_2, ... distinctionem accuratam petimus, quas ita semper eligendas esse constituimus, ut $u = c - b$ sit numerus positivus. Summas tres, quae in theoria residuorum cubicorum maximi momenti sunt:

$$\Sigma \cos \frac{2a\pi}{p} = y_1, \quad \Sigma \cos \frac{2\beta\pi}{p} = y_2, \quad \Sigma \cos \frac{2\gamma\pi}{p} = y_3,$$

cl. *Gauss* invenit radices esse aequationis cubicae

$$y^3 + y^2 - \tfrac{1}{3}(p-1)y - \tfrac{1}{27}(pt + 3p - 1) = 0;$$

nos autem in iis quae sequuntur illarum summarum loco accipiemus has:

$$\Sigma \cos \frac{2\alpha x^3 \pi}{p} = z_1, \quad \Sigma \cos \frac{2\beta x^3 \pi}{p} = z_2, \quad \Sigma \cos \frac{2\gamma x^3 \pi}{p} = z_3,$$

in quibus signa summatoria ad valores $x = 0, 1, 2, \ldots p-1$ referenda sunt. Hae summae z_1, z_2 et z_3 sunt radices aequationis simplicioris

$$1. \quad z^3 = 3pz + pt,$$

et cum summis y_1, y_2, y_3 ita cohaerent, ut sit $z_1 = 1 + 3y_1$, $z_2 = 1 + 3y_2$, $z_3 = 1 + 3y_3$. Inde efficiuntur aequationes

$$2. \quad \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0, & z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = -3p, \quad z_1 z_2 z_3 = pt, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6p, & z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3pt. \end{cases}$$

Porro habentur sex aequationes, quarum ope quaelibet radicum z_1, z_2, z_3 rationaliter per aliam determinatur:

$$3. \quad \begin{cases} 3uz_2 = -z_1^2 + \frac{1}{2}(t - 3u)z_1 + 2p, & 3uz_3 = z_1^2 - \frac{1}{2}(t + 3u)z_1 - 2p, \\ 3uz_3 = -z_2^2 + \frac{1}{2}(t - 3u)z_2 + 2p, & 3uz_1 = z_2^2 - \frac{1}{2}(t + 3u)z_2 - 2p, \\ 3uz_1 = -z_3^2 + \frac{1}{2}(t - 3u)z_3 + 2p, & 3uz_2 = z_3^2 - \frac{1}{2}(t + 3u)z_3 - 2p; \end{cases}$$

quae binae per subtractionem conjunctae dant:

$$4. \quad \begin{cases} 3u(z_2 - z_3) = -2z_1^2 + tz_1 + 4p, \\ 3u(z_3 - z_1) = -2z_2^2 + tz_2 + 4p, \\ 3u(z_1 - z_2) = -2z_3^2 + tz_3 + 4p, \end{cases}$$

iisque multiplicatis, per faciles reductiones fit

$$5. \quad (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 27pu.$$

Aequatio cubica (1.) rite soluta dat radices tres:
$z = -\sqrt{p} \cdot \sin \frac{1}{3}\nu - \sqrt{(3p)} \cos \frac{1}{3}\nu$, $z = 2\sqrt{p} \cdot \sin \frac{1}{3}\nu$, $z = -\sqrt{p} \cdot \sin \frac{1}{3}\nu + \sqrt{(3p)} \cos \frac{1}{3}\nu$, in quibus ν est arcus minimus cujus sinus $= \frac{-t}{2\sqrt{p}}$, qui intra limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$ versatur. Inde concluditur harum radicum unam intra limites $-2\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$, alteram intra limites $-\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$, tertiam intra limites $+\sqrt{p}$ et $+2\sqrt{p}$ sitam esse, quae autem radicum definitarum z_1, z_2, z_3, ad hos singulos limites pertineat, quaestio est difficillima, de qua infra copiosius agemus.

§. 2.

In theoria residuorum quadraticorum summae serierum duarum $\Sigma\cos\frac{2ax^2\pi}{p}$ et $\Sigma\cos\frac{2bx^2\pi}{p}$, quae seriebus z_1, z_2 et z_3 respondent, facile adeo extenduntur, ut p sit numerus quicunque compositus; eandem summarum amplificationem in seriebus z_1, z_2 et z_3 perficiemus, unde magna earum differentia ab iis, quae ad residua quadratica pertinent, elucebit. Quum enim theoremata, quae de illis pro modulis primis inventa sunt, aucta etiam elegantia pro modulis compositis pronunciari possint, et res tota vertatur in residuis, quae numerus compositus p habeat, modulo 4: hic non ipsius numeri compositi, sed factorum ejus primorum formae lineares, et numerus factorum inter se aequalium summas determinant. Antequam vero de modulis quomodocunque compositis agemus, casum peculiarem absolvemus, quo modulus est potestas numeri primi, atque in eo seorsim considerabimus factores primos formarum $6r+1$ et $6r-1$, et praeterea numeros primos 2 et 3.

Si p est numerus primus formae $6r+1$, et n numerus integer unitate major, residua numerorum 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, ... $(p^n-1)^3$, modulo p^n, separatis multiplis numeri p, omnia continentur forma $\alpha+\mu p$, ubi α quodvis residuum cubicum numeri p, et μ quemvis numerorum $0, 1, 2, 3, \ldots (p^{n-1}-1)$ significat. Nam congruentiae $x^3\equiv A$, modulo p^n, satisfieri nequit, nisi sit $x^3\equiv A$, modulo p, sive, quod idem est, $A=\alpha+\mu p$, numerus autem residuorum cubicorum α est $\frac{1}{3}(p-1)$, et numerus omnium valorum numeri μ, qui formam $\alpha+\mu p$ modulo p^n minorem reddunt, est p^{n-1}, unde colligitur numerum omnium residuorum cubicorum, pro modulo p^n, majorem quam $\frac{1}{3}p^{n-1}(p-1)$ esse non posse. Praeterea notum est congruentiam $x^3\equiv A$, modulo p^n, plures quam tres radices incongruas non habere, qua re, quum terni numeri 1^3, 2^3, 3^3, ... $(p^n-1)^3$ idem residuum dare possint, neque plures, numerus omnium residuorum non minor esse potest tertia parte numerorum illorum, quae est $\frac{1}{3}p^{n-1}(p-1)$. Ex iis concluditur, omnes numeros, quos forma $\alpha+\mu p$ contineat, et praeter hos nullos, residua esse numerorum 1^3, 2^3, 3^3, ... $(p^n-1)^3$, modulo p^n, eaque residua singula ter inveniri. Multipla numeri p, quae series 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, ... $(p^n-1)^3$ continet, sunt 0^3, $1^3\cdot p^3$, $3^3\cdot p^3$, ... $(p^{n-1}-1)^3p^3$, eorumque residua, modulo p^n, si n non majus quam 3, omnia sunt aequalia nihilo; si vero $n>3$, factore communi p^3 omisso, quaerenda sunt residua numerorum $0, 1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ $(p^{n-1}-1)^3$, modulo p^{n-3}, quae esse residua numerorum $0, 1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ $(p^{n-3}-1)^3$ toties iterata quot p^2 continet unitates, sponte apparet. Quibus po-

sitis, si $n > 3$ et m numerus arbitrarius ad p^n primus, summa quaesita tali modo exhiberi potest:

$$\Sigma \cos \frac{2m\varkappa^2\pi}{p^n} = p^2 \Sigma \cos \frac{2m\lambda^3\pi}{p^{n-3}} + 3\Sigma\Sigma \cos \frac{2m(\alpha+\mu p)\pi}{p^n};$$

in qua formula signa summatoria hanc vim habent, ut literae $\varkappa$ tribuendi sint valores $0, 1, 2, \ldots (p^n-1)$, literae λ valores $0, 1, 2, \ldots (p^{n-3}-1)$, literae μ valores $0, 1, 2, 3, \ldots (p^{n-1}-1)$ et literae α valores omnium residuorum cubicorum numeri p. Consummatio secundum literam μ, quae per notas formulas trigonometricas facillime perficitur, summam dat zero, qua re haec aequationis pars tota evanescit, et formula efficitur simplicissima

$$6. \quad \Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p^n} = p^2 \Sigma \cos \frac{2m\lambda^3\pi}{p^{n-3}}.$$

Inde pro quolibet numero n hujus seriei summa reducta est ad casus quibus $n = 1, 2$ et 3. Pro $n = 2$ et $n = 3$ ex iis, quae modo exposuimus, facile concluditur

$$\Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p^2} = p, \qquad \Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p^3} = p^2,$$

itaque formula (6.) adhibita est generaliter

$$7. \quad \begin{cases} \Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p^n} = p^{\frac{1}{3}(2n-2)} \Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p}, & \text{si } n \equiv 1 \text{ modulo } 3, \\ \Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p^n} = p^{\frac{1}{3}(2n-1)}, & \text{si } n \equiv 2, \text{ modulo } 3, \\ \Sigma \cos \frac{2m\varkappa^3\pi}{p^n} = p^{\frac{2}{3}n}, & \text{si } n \equiv 0, \text{ modulo } 3. \end{cases}$$

Deinde si q est numerus primus formae $6r-1$, residua cuborum 1^3, 2^3, 3^3, $\ldots (q^n-1)^3$, omissis multiplis numeri q, eadem sunt ac numeri omnes minores quam q^n et ad q primi, cujus propositionis demonstrationem eo petimus, quod illorum cuborum duo x^3 et y^3 eadem residua dare non possunt. Posito enim $x^3 \equiv y^3$, esset $(x-y)(x^2+xy+y^2) \equiv 0$, et quia forma x^2+xy+y^2 factorem $q = 6r-1$ habere non potest, esse deberet $x - y \equiv 0, \ldots$, modulo q^n, quod, quia x et y minores quam q^n supponuntur, nullo modo fieri potest. Facile inde concluditur, haec residua omnia forma $\nu + \mu p$ contineri, in qua $\nu = 1, 2, 3, \ldots q^{n-1}-1$. De residuis cuborum qui per q divisibiles sunt idem valet, quod supra de modulo p^n invenimus, scilicet, si n non > 3, haec residua, quorum numerus est q^{n-1} omnia nihilo aequalia sunt, si vero $n > 3$, factore communi q^3 omisso, residuis numerorum 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, $\ldots$ $(q^{n-3}-1)^3$, totidem sumtis quot q^2 continet unitates. Itaque est simili modo ac supra:

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{q^n} = q^2\Sigma\cos\frac{2m\lambda^3\pi}{q^{n-1}} + \Sigma\Sigma\cos\frac{2m(\nu+\mu q)\pi}{q^n},$$

ubi $\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots . q^n - 1$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots . q^{n-3} - 1$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots . q^{n-1} - 1$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots . q - 1$. Consummatione secundum omnes valores literae μ perfecta, haec summa duplex evanescit, et prodit formula simplex

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{q^n} = q^2\Sigma\cos\frac{2m\lambda^3\pi}{q^{n-3}}.$$

Denique, quum sit

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{q} = 0, \quad \Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{q^2} = q, \quad \Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{q^3} = q^2,$$

est generaliter:

$$8.\quad \begin{cases} \Sigma\cos\dfrac{2m\varkappa^3\pi}{q^n} = 0, & \text{si } n \equiv 1, \text{ modulo } 3, \\ \Sigma\cos\dfrac{2m\varkappa^3\pi}{q^n} = q^{\frac{1}{3}(2n-1)}, & \text{si } n \equiv 2, \text{ modulo } 3, \\ \Sigma\cos\dfrac{2m\varkappa^3\pi}{q^n} = q^{\frac{2}{3}n}, & \text{si } n \equiv 0, \text{ modulo } 3. \end{cases}$$

Eaedem summae valent etiam pro $q = 2$, neque alia huius rei est demonstratio, nisi quod forma $x^2 + xy + y^2$ hic tanquam summa trium numerorum imparium factorem $q = 2$ habere non potest.

Denique pro modulo 3^n residua cuborum per 3 non divisibilium 1^3, 2^3, 4^3, 5^3, ... $(3^n - 1)^3$ formam habent $9\mu \pm 1$; nam si horum cuborum aliquis accipitur x^3, x habet formam $3r \pm 1$, et congruentia $x^3 \equiv A$, modulo 3^n, dat $27r^3 + 27r^2 + 9r \pm 1 \equiv A$, ergo A divisum per 9, residuum dat ± 1, uti contendimus. Porro congruentia $x^3 \equiv y^3$ habet tres radices incongruas, terna igitur residua numerorum 1^3, 2^3, 4^3, ... $(3^n - 1)^3$ inter se aequalia sunt, et numerus inaequalium est $2 \cdot 3^{n-3}$, qui, quum sit numerus omnium numerorum formae $9\mu \pm 1$, modulo 3^n minorum, concluditur hos omnes in residuis illis reperiri. Cuborum per 3 divisibilium 0, $1^3 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3^3$, $3^3 \cdot 3^3$, ... $(3^{n-1} - 1)^3 \cdot 3^3$ residua, factore communi 3^3 omisso, non alia sunt ac residua cuborum 0, 1^3, 2^3, 3^3, ... $(3^{n-3} - 1)^3$, quae novies iterantur, unde sequitur

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{3^n} = 9\Sigma\cos\frac{2m\lambda^3\pi}{3^{n-3}} + 3\Sigma\cos\frac{2m(9\mu \pm 1)\pi}{3^n},$$

ubi $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots . (3^n - 1)$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots . 3^{n-3} - 1$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots . 3^{n-2} - 1$, et m est numerus arbitrarius factorem 3 non complectens. Etiam hoc casu terminus tertius, consummatione secundum valores literae μ peracta, evanescit, unde fit:

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{3^n} = 9\Sigma\cos\frac{2m\lambda^3\pi}{3^{n-3}},$$

et quia summa quaesita pro $n=1$, $n=2$ et $n=3$ facile invenitur

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{3}=0,\quad \Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{9}=3\left(1+2\cos\frac{2m\pi}{9}\right),\quad \Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{27}=9,$$

habemus generaliter:

$$9.\quad \begin{cases} \Sigma\cos\dfrac{2m\varkappa^3\pi}{3^n}=0, & \text{si } n\equiv 1, \text{ modulo } 3,\\ \Sigma\cos\dfrac{2m\varkappa^3\pi}{3^n}=3^{\frac{1}{2}(2n-1)}\left(1+2\cos\dfrac{2m\pi}{9}\right), & \text{si } n\equiv 2, \text{ modulo } 3,\\ \Sigma\cos\dfrac{2m\varkappa^3\pi}{3^n}=3^{\frac{2}{3}n}, & \text{si } n\equiv 0, \text{ modulo } 3. \end{cases}$$

Casibus iis specialibus absolutis, seriei propositae summa pro modulis quomodocunque compositis facile invenitur, theorematis ope quod in hac aequatione continetur:

$$10.\quad \Sigma\cos\frac{2mQ^2\varkappa^3\pi}{P}\cdot\Sigma\cos\frac{2mP^2\lambda^3\pi}{Q}=\Sigma\cos\frac{2m\mu^3\pi}{PQ},$$

in qua summae extendendae sunt ad numeros $\varkappa=0,1,2,3,\ldots. P-1$; $\lambda=0,1,2,3,\ldots. Q-1$; $\mu=0,1,2,3,\ldots. PQ-1$, et literae P, Q, m numeros quoscunque inter se primos designant. Primum observamus seriem $\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{P}$ eandem esse ac $\Sigma e^{\frac{2m\varkappa^3\pi\sqrt{-1}}{P}}$, cujus pars imaginaria per se evanescit, qua de causa in seriebus illis cosinuum loco quantitatibus exponentialibus imaginariis uti licet. Inde per multiplicationem simplicem habemus

$$\Sigma e^{\frac{2mQ^2\varkappa^3\pi\sqrt{-1}}{P}}\cdot\Sigma e^{\frac{2mP^2\lambda^3\pi\sqrt{-1}}{Q}}=\Sigma\Sigma e^{\frac{2m(Q^3\varkappa^3+P^3\lambda^3)\pi\sqrt{-1}}{PQ}},$$

adjecto factore $e^{6m\varkappa\lambda(Q\varkappa+P\lambda)\pi\sqrt{-1}}$, qui est $=1$, haec summa duplex induit formam

$$\Sigma\Sigma e^{\frac{2m(Q\varkappa+P\lambda)^3\pi\sqrt{-1}}{PQ}}.$$

Formula $Q\varkappa+P\lambda$ valores congruos, modulo PQ, non habet. Si enim esset $Q\varkappa+P\lambda\equiv Q\varkappa^1+P\lambda^1$, modulo PQ, inde sequeretur $Q(\varkappa-\varkappa^1)+P(\lambda-\lambda^1)\equiv 0$. et quum P et Q per hypothesin sint inter se primi, haec congruentia subsistere nequit, nisi $\varkappa-\varkappa^1\equiv 0$, modulo P, et $\lambda-\lambda^1\equiv 0$, modulo Q, quod, quia $\varkappa$ et $\varkappa^1$ sunt minores quam P et inaequales, λ et λ^1 minores quam Q et inaequales, absurdum est. Praeterea patet, numerum omnium valorum formae $Q\varkappa+P\lambda$ esse PQ, unde sequitur ut, multiplis moduli PQ omissis, hi valores consentiant cum numeris $0, 1, 2, 3, \ldots. PQ-1$. Inde ista summa duplex in simplicem mutatur, partibusque imaginariis, quarum altera alteram tollit, rejectis, provenit aequatio supra allata. Jam si $R=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot p^\gamma\cdot p'^{\gamma'}\ldots. q^\delta\cdot q'^{\delta'}\ldots.$ est numerus quo-

modocunque compositus, in quo $p, \overset{1}{p}, \ldots$ designant numeros primos formae $6m+1$ et $q, \overset{1}{q}, \ldots$ numeros primos formae $6r-1$, summa $\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{R}$, per hoc theorema in productum tot summarum diffinditur, quot R factores habet inter se primos, scilicet

$$11.\quad \Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{R} = \Sigma\cos\frac{2ma\varkappa^3\pi}{2^\alpha}\cdot\Sigma\cos\frac{2mb\varkappa^3\pi}{3^\beta}\cdot\Sigma\cos\frac{2mc\varkappa^3\pi}{p^\gamma}\cdot\Sigma\cos\frac{2mc^1\varkappa^3\pi}{\overset{1}{p}^{\gamma'}}\ldots.$$
$$\ldots\Sigma\cos\frac{2md\varkappa^3\pi}{q^\delta}\cdot\Sigma\cos\frac{2md^1\varkappa^3\pi}{\overset{1}{q}^{\delta'}}\ \ldots.;$$

in qua formula brevitatis causa scriptum est $\left(\frac{R}{2^\alpha}\right)^2 = a$, $\left(\frac{R}{3^\beta}\right)^2 = b$, $\left(\frac{R}{p^\gamma}\right)^2 = c$, etc. easque summas singulas, quarum moduli sunt numerorum primorum potestates, supra invenimus. Indoles igitur summae $\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{R}$ maxime a residuis pendet quae factorum primorum numeri R exponentes, $\alpha, \beta, \gamma, \overset{1}{\gamma}, \ldots. \delta, \overset{1}{\delta}, \ldots.$ dant modulo 3. Nam si quis numerorum $\alpha, \beta, \delta, \overset{1}{\delta}, \ldots.$ habet formam $3r+1$, semper est $\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{R} = 0$; si vero exponentium $\alpha, \beta, \gamma, \overset{1}{\gamma}, \ldots. \delta, \overset{1}{\delta}, \ldots.$ nullus habet formam $3r+1$, haec summa aequatur numero integro C, numeri R divisori, cui, si $\beta = 3r+2$, praeterae adjicendus est factor $1+2\cos\frac{2m\pi}{9}$; denique si qui numerorum $\gamma, \overset{1}{\gamma}, \ldots.$ habent formam $3r+1$, exempli causa ipsi duo numeri γ et $\overset{1}{\gamma}$, haec summa numero illi integro C aequatur, multiplicato per summas $\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{\overset{1}{p}}\cdot\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{p}$. Posito $R = 42375500 = 2^2\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^4\cdot13$, est:

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{R} = 22050\,\Sigma\cos\frac{6m\varkappa^3\pi}{7}\cdot\Sigma\cos\frac{4m\varkappa^3\pi}{13};$$

posito $R = 1000 = 2^3\cdot5^3$ est

$$\Sigma\cos\frac{2m\varkappa^3\pi}{1000} = 100.$$

§. 3.

Notissimum est signum $\left(\frac{m}{p}\right)$ a Cl. ***Legendre*** residuis quadraticis adhibitum, et propter eximiam elegantiam, quam formulae describendae ideo accipiunt, postea ab omnibus fere geometris receptum, quod statuitur $= +1$ vel $= -1$, prout m est residuum vel nonresiduum quadraticum numeri primi p. Idem signum etiam residuis cubicis maximam utilitatem affert; pro iis vero $\left(\frac{m}{p}\right)$ non

radici quadraticae, sed radici cubicae unitatis aequale statuendum est, ita ut sit $\left(\frac{m}{p}\right)=1$, si m est residuum cubicum, sive si m est aliquis numerorum α, α_1, α_2, ...; porro sit $\left(\frac{m}{p}\right)=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, si m est aliquis numerorum β, β_1, β_2, ...; denique sit $\left(\frac{m}{p}\right)=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, si m est inter numeros $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Haec significationis amplificatio Clo. ***Jacobi*** debetur, qui in literis de circuli sectionibus earumque applicationibus ad doctrinam numerorum, regiae litterarum academiae Berolinensi mense octobri anni 1837 traditis, hujus signi ope residuorum cubicorum legem reciprocitatis forma simplicissima exhibuit. Pro hoc signo valent aequationes fundamentales:

$$12.\quad \left(\frac{m}{p}\right)\cdot\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{mn}{p}\right),\quad \left(\frac{p-m}{p}\right)=\left(\frac{m}{p}\right),\quad \left(\frac{m+\varkappa p}{p}\right)=\left(\frac{m}{p}\right);$$

casu quo $m=\varkappa p$ est multiplum numeri p, signo $\left(\frac{m}{p}\right)$ valorem zero tribuimus. Jam nobis problema, cui disquisitiones ulteriores maxime innituntur, solvendum proponimus:

Data summa seriei

$$\varphi(v) = A_1\cos v + A_2\cos 2v + A_3\cos 3v + A_4\cos 4v + \ldots.$$

invenire hujus seriei summam:

$$\left(\frac{1}{p}\right)A_1+\left(\frac{2}{p}\right)A_2+\left(\frac{3}{p}\right)A_3+\left(\frac{4}{p}\right)A_4+\ldots.$$

Quem in finem consideremus summam $\Sigma\left(\frac{m\varkappa}{p}\right)^2\cos\frac{2m\varkappa\pi}{p}$ pro $\varkappa=0,1,2,\ldots.(p-1)$, quae, casibus, quibus $m\varkappa$ ad seriem numerorum α vel β vel γ pertinet, separatis, in has tres dilabitur:

$$\Sigma\left(\frac{m\varkappa}{p}\right)^2\cos\frac{2m\varkappa\pi}{p}=\Sigma\cos\frac{2\alpha\pi}{p}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\Sigma\cos\frac{2\beta\pi}{p}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\Sigma\cos\frac{2\gamma\pi}{p}.$$

Dehinc radicem cubicam unitatis $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ nos ubique litera h designabimus, unde sequitur ut alteri radici imaginariae $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ signum h^2 tribuendum sit. Summas singulas, quas haec formula continet, supra literis y_1, y_2, y_3 designavimus, earumque loco has novas $z_1=1+3y_1$, $z_2=1+3y_2$, $z_3=1+3y_3$ substituimus, quibus signis adhibitis haec formula simpliciorem formam accipit:

$$13.\quad 3\Sigma\left(\frac{m\varkappa}{p}\right)^2\cos\frac{2m\varkappa\pi}{p} = z_1+h^2z_2+hz_3,$$

quia $\left(\frac{m\varkappa}{p}\right)^2 = \left(\frac{m}{p}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2$ et $\left(\frac{m}{p}\right)^3 = 1$; multiplicando per $\left(\frac{m}{p}\right)$ habemus

$$14.\quad 3\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 \cos\frac{2m\varkappa\pi}{p} = \left(\frac{m}{p}\right)(z_1 + h^2 z_2 + h z_3);\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots . (p-1).$$

Hujus summae termini bini, ab initio et a fine aeque distantes, aequales sunt, quibus binis in unum conjunctis, est

$$15.\quad 6\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 \cos\frac{2m\varkappa\pi}{p} = \left(\frac{m}{p}\right)(z_1 + h^2 z_2 + h z_3);\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots . \tfrac{1}{2}(p-1).$$

Jam si in aequatione

$$\varphi(v) = A_1 \cos v + A_2 \cos 2v + A_3 \cos 3v + A_4 \cos 4v,$$

quae intra limites $v = 0$ et $v = 2\pi$ valere debet, $v = \frac{2\varkappa\pi}{p}$ ponitur, per $3\cdot\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2$ multiplicatur et summae formantur pro $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots . p-1$, per formulam (14.) fit

$$16.\quad 3\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 \varphi\left(\frac{2\varkappa\pi}{p}\right) = (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(\left(\frac{1}{p}\right)A_1 + \left(\frac{2}{p}\right)A_2 + \left(\frac{3}{p}\right)A_3 + \ldots .\right)$$

pro $\varkappa = 1, 2, 3, 4, \ldots . (p-1)$. Simili modo, si aequatio

$$\varphi(v) = A \cos v + A_2 \cos 2v + A_3 \cos 3v + \ldots .$$

intra limites $v = 0$ et $v = \pi$ valet, ex formula (15.) deducitur

$$17.\quad 6\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 \varphi\left(\frac{2\varkappa\pi}{p}\right) = (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(\left(\frac{1}{p}\right)A_1 + \left(\frac{2}{p}\right)A_2 + \left(\frac{3}{p}\right)A_3 + \ldots .\right)$$

pro $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots . \tfrac{1}{2}(p-1)$, eaeque formulae (16. et 17.) problematis propositi solutionem continent.

§. 4.

Formularum generalium usum exemplis nonnullis illustraturi primum faciamus

$$\varphi(v) = \cos v + \frac{\cos 3v}{3^2} + \frac{\cos 5v}{5^2} + \ldots ,$$

cujus seriei summa intra limites $v = 0$ et $v = \pi$ est $\varphi(v) = -\frac{1}{4}\pi v + \frac{1}{8}\pi^2$, quibus in formula (17.) substitutis, est

$$6\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2\varkappa}{2p}\right) = (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^2} + \ldots .\right)$$

pro $\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tfrac{1}{2}(p-1)$. Separatis casibus, quibus $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = h$ et $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = h^2$, fit:

$$18.\quad -\frac{3\pi^2}{p}(\Sigma\alpha + h^2\Sigma\beta + h\Sigma\gamma) = (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^2} + \ldots .\right)$$

signaque summarum ad omnes valores numerorum α, β, γ, minores quam $\frac{1}{2}p$ extendenda sunt. Simili modo etiam haec series infinita in tres series singulas dilabitur. Posito enim

$$\Sigma\frac{1}{\alpha^2}=A, \quad \Sigma\frac{1}{\beta^2}=B, \quad \Sigma\frac{1}{\gamma^2}=C,$$

ubi summarum signa ad omnes valores impares numerorum α, β, γ in infinitum sunt extendenda, fit

$$\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^2}+\left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^2}+\ldots. = A+hB+h^2C,$$

ideoque est

$$19. \quad \frac{-3\pi^2}{p}(\Sigma\alpha+h^2\Sigma\beta+h\Sigma\gamma) = (z+h^2z_2+hz^3)(A+hB+h^2C).$$

Formulae quae sequuntur multo simpliciores fiunt, si loco ipsarum summarum $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ earum differentiis a valore medio arithmetico utimur, quas literis m_1, m_2 et m_3 designabimus. Ponimus igitur

$\frac{1}{3}(\Sigma\beta+\Sigma\gamma-2\Sigma\alpha)=m_1$, $\frac{1}{3}(\Sigma\alpha+\Sigma\gamma-2\Sigma\beta)=m_2$, $\frac{1}{3}(\Sigma\alpha+\Sigma\beta-2\Sigma\gamma)=m_3$,

sive, quia est $\Sigma\alpha+\Sigma\beta+\Sigma\gamma = 1+2+3+\ldots.+\frac{1}{2}(p-1) = \frac{1}{8}(p^2-1)$:

$\frac{1}{24}(p^2-1)-\Sigma\alpha=m_1$, $\frac{1}{24}(p^2-1)-\Sigma\beta=m_2$, $\frac{1}{24}(p^2-1)-\Sigma\gamma=m_3$.

Numeri m_1, m_2, m_3, quos integros esse patet, ita comparati sunt, ut eorum summa nihilo aequalis sit, sive $m_1+m_2+m_3=0$, iisque summarum $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ loco substitutis, formula (19.) hanc formam accipit:

$$20. \quad \frac{3\pi^2}{p}(m_1+h^2m_2+hm_3) = (z_1+h^2z_2+hz_3)(A+hB+h^2C).$$

Quia h est forma imaginaria, haec aequatio duas reales complectitur, quibus, si adduntur aequationes $m_1+m_2+m_3=0$, $A+B+C=\frac{\pi^2(p^2-1)}{8p^2}$ et $z_1+z_2+z_3=0$, hae aequationes reales triplici modo exhiberi possunt, prout m_1, m_2, m_3, vel A, B, C, vel z_1, z_2, z_3 pro incognitis habentur. Inde prodeunt aequationes elegantes:

$$21. \quad \begin{cases} \frac{3\pi^2}{p}m_1 = Az_1+Bz_2+Cz_3, \\ \frac{3\pi^2}{p}m_2 = Az_2+Bz_3+Cz_1, \\ \frac{3\pi^2}{p}m_3 = Az_3+Bz_1+Cz_2, \end{cases}$$

$$22.\quad \begin{cases} A = \dfrac{\pi^2(p^2-1)}{24p^2} + \dfrac{\pi^2}{3p^2}(m_1\mathfrak{z}_1 + m_2\mathfrak{z}_2 + m_3\mathfrak{z}_3), \\ B = \dfrac{\pi^2(p^2-1)}{24p^2} + \dfrac{\pi^2}{3p^2}(m_1\mathfrak{z}_2 + m_2\mathfrak{z}_3 + m_3\mathfrak{z}_1), \\ C = \dfrac{\pi^2(p^2-1)}{24p^2} + \dfrac{\pi^2}{3p^2}(m_1\mathfrak{z}_3 + m_2\mathfrak{z}_1 + m_3\mathfrak{z}_2), \end{cases}$$

$$23.\quad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = \dfrac{2p^2(Am_1+Bm_3+Cm_2)}{\pi^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2)} = \dfrac{-2p((A-B)m_3+(A-C)m_2)}{\pi(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}, \\ \mathfrak{z}_2 = \dfrac{2p^2(Am_2+Bm_1+Cm_3)}{\pi^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2)} = \dfrac{-2p((A-B)m_1+(A-C)m_3)}{\pi(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}, \\ \mathfrak{z}_3 = \dfrac{2p^2(Am_3+Bm_2+Cm_1)}{\pi^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2)} = \dfrac{-2p((A-B)m_2+(A-C)m_1)}{\pi(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}. \end{cases}$$

His etiam differentias binarum quantitatum $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ et $\mathfrak{z}_3$ adjungimus, quae consilio nostro inservient:

$$24.\quad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 = \dfrac{2p^2((A-2B+C)m_1-(A-2C+B)m_2)}{\pi^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}, \\ \mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3 = \dfrac{2p^2((A-2B+C)m_2-(A-2C+B)m_3)}{\pi^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}, \\ \mathfrak{z}_3 - \mathfrak{z}_1 = \dfrac{2p^2((A-2B+C)m_3-(A-2C+B)m_1)}{\pi^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}. \end{cases}$$

Jam si praeter numeros m_1, m_2, m_3, etiam series infinitae A, B, C cognitae essent, per aequationes (23.) valores quantitatum $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ accurate determinari possent; in quaestione vero praesenti sufficit cognovisse $A-B$, $A-C$, $A-2B+C$, $A-2C+B$ omnes esse positivos, quod inde sequitur ut sit $A = 1+\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\ldots.$, ergo $A>1$ et $A+B+C<\frac{1}{8}\pi^2<\frac{5}{4}$, itaque $B+C<\frac{1}{4}$, nec non $B<\frac{1}{4}$, et $C<\frac{1}{4}$. Numerorum m_1, m_2, m_3, quorum summa est nihilo aequalis, unus est absolute maximus, reliqui duo minores eadem signa habent, opposita signo maximi. Ponamus primo, m_1 esse numerum maximum, eumque positivum, unde m_2 et m_3 minores et negativi, hinc per aequationes (23.) et (24.) est $\mathfrak{z}_1$ positivum, $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2$ positivum et $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_3$ positivum, itaque $\mathfrak{z}_1$ est aequationis illius cubicae radix maxima positiva, quae intra limites $+2\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$ sita est. Simili modo, si m_1 est numerus absolute maximus, sed negativus, m_2 et m_3 erunt positivi, et per aequationes (23.) et (24.) $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_3$ omnes erunt negativi; unde concluditur $\mathfrak{z}_1$ esse radicem minimam aequationis cubicae, quae intra limites $-\sqrt{p}$ et $-2\sqrt{p}$ sita est. Pro numero absolute maximo m_2 habemus eodem modo, si m_2 est positivus, $\mathfrak{z}_2$ intra limites $+2\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$, si vero m_2 est negativus, $\mathfrak{z}_2$ intra limites

$-\sqrt{p}$ et $-2\sqrt{p}$; denique pro numero absolute maximo m_3 est z_3 intra limites $+2\sqrt{p}$ et $\sqrt{p}$, si m_3 est positivus, et z_3 intra limites $-\sqrt{p}$ et $-2\sqrt{p}$, si m_3 est negativus. Semper igitur una radicum z_1, z_2, z_3 omnino determinata est per numeros m_1, m_2, m_3 et quia per unam radicem reliquae rationaliter expressae sunt, omnes jam determinatae sunt. Ceterum notandum est, ad reliquarum duarum radicum limites definiendos non opus esse aequationibus (3.), sed hanc quaestionem facillime per aequationem (5.) absolvi. In universum enim sex modi dantur quibus singulae tres radices z_1, z_2, z_3 ad tria intervalla $-2\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$, $-\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$, $+\sqrt{p}$ et $+2\sqrt{p}$ pertinere possunt. Quum vero per aequationem (5.) $(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1) = 27pu$ sit, et u numerus positivus, haec intervalla, quae singulis radicibus respondent, ita eligi debent, ut $(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$ sit quantitas positiva, unde fit ut tres casus rejiciendi sint, et soli tres sequentes locum habere possint:
z_1 intra lim. $-2\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$, z_2 intra lim. $-\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$, z_3 intra lim. $+\sqrt{p}$ et $+2\sqrt{p}$,
z_1 intra lim. $-\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$, z_2 intra lim. $+\sqrt{p}$ et $+2\sqrt{p}$, z_3 intra lim. $-2\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$,
z_1 intra lim. $+\sqrt{p}$ et $+2\sqrt{p}$, z_2 intra lim. $-2\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$, z_3 intra lim. $-\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$.

Hoc modo aequationis illius radices singulae accurate determinatae sunt; sed haec problematis solutio non ea est, quae peritis ab omni parte satisfacere possit; nam hoc desideratur, ut ex ipsius numeri primi p indole dijudicari possit, ad quae intervalla radices z_1, z_2, z_3 referendae sint, neque vero ex indole numerorum m_1, m_2, m_3, qui pro dato numero p non sine labore computantur. Hunc calculum numerorum m_1, m_2, m_3, pro omnibus numeris primis formae $6n+1$ usque ad 499, ope tabularum canonis arithmetici a Clo. *Jacobi* editi perfecimus et per methodum modo traditam ex iis invenimus esse I°, z_1 intra limites $-2\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$ pro numeris primis $p = 97, 139, 151, 199, 211, 331, 433$. II°, z_1 intra limites $-\sqrt{p}$ et $+\sqrt{p}$ pro numeris primis $p = 13, 19, 37, 61, 109, 157, 193, 241, 283, 367, 373, 379, 397, 487$. III°, z_1 intra limites $+\sqrt{p}$ et $+2\sqrt{p}$ pro numeris primis $p = 7, 31, 43, 67, 73, 79, 103, 127, 163, 181, 223, 229, 271, 277, 307, 313, 337, 349, 409, 421, 439, 457, 463, 499$. Omnes numeri primi, formae $6n+1$, talimodo in tres classes dividuntur, atque ex 45 numeris primis infra 500 ad classem primam pertinent 7, ad classem secundam 14, ed ad classem tertiam 24, quorum numerorum ratio proxime exprimitur per 1:2:3; nec improbabile est, eandem rationem etiam pro majore numero semper servatum iri. Quum doctrinae numerorum historia multis exemplis doceat, veritates arithmeticas per inductionem inventas et tum demum demonstratas esse, nos talem inductionem pro his tribus classibus numerorum primorum dignoscendis multis modis tentavimus, sed hactenus frustra

criterium quaesivimus, quo alicujus classis numeri a reliquis numeris primis formae $6n+1$ discerni possint.

§. 5.

Ex aequationibus supra allatis (20—23) etiam numerorum m_1, m_2, m_3, et serierum infinitarum A, B, C proprietates nonnullas deducemus. Trium aequationum (21.) quadrata addita, adhibitis aequationibus $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6p$ et $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3p$, dant

$$25.\quad \frac{3\pi^4}{2p^3}(m_1^2+m_2^2+m_3^2) = A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA.$$

Quantitas $A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA$, quam breviter litera δ designabimus, limitibus arctis circumscripta est, quos facillime per repraesentationem hujus quantitatis δ in forma producti infiniti invenimus. Quem in finem litera r designamus omnes numeros primos impares, qui sunt residua cubica numeri p, et litera n omnes numeros primos impares, qui sunt nonresidua cubica ejusdem numeri p. Inde, per principia, quae jam summus *Eulerus* in introductione in analysin infinitorum exposuit, concluditur

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{r^2}}\Pi\frac{1}{1-\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n^2}} = 1+\left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^2}+\left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^2}+\left(\frac{7}{p}\right)\frac{1}{7^2}+\ldots,$$

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{r^2}}\Pi\frac{1}{1-\left(\frac{n}{p}\right)^2\frac{1}{n^2}} = 1+\left(\frac{3}{p}\right)^2\frac{1}{3^2}+\left(\frac{5}{p}\right)^2\frac{1}{5^2}+\left(\frac{7}{p}\right)^2\frac{1}{7^2}+\ldots.$$

Harum serierum altera est $A+hB+h^2C$, altera $A+h^2B+hC$, earumque productum est δ; itaque, duabus iis formulis inter se multiplicatis, habemus

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r^4}}\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \delta.$$

Praeterea est

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{r^2}}\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots. = \frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{r^6}}\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{n^6}} = 1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots. = \frac{\pi^6}{960}\left(1-\frac{1}{p^6}\right),$$

earumque aequationum altera per alteram divisa:

$$\Pi\frac{1}{1+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}\Pi\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \frac{\pi^4}{120}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}\right).$$

Per hanc aequationem nonresidua ex repraesentatione quantitatis δ tolli possunt, unde provenit

$$26. \quad \delta = \frac{\pi^4}{120}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}\right)\Pi\left(\frac{1+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{1-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r^4}}\right);$$

simili modo δ per nonresidua n exprimitur

$$27. \quad \delta = \frac{\pi^4}{64}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2\Pi\left(\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right).$$

Horum productorum infinitorum alterum est majus unitate, alterum minus unitate; qua de causa est $\delta > \frac{\pi^4}{120}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}\right) > \frac{\pi^4}{120}$, et $\delta < \frac{\pi^4}{64}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2 < \frac{\pi^4}{64}$; limites igitur, intra quos δ continetur, sunt $\frac{\pi^4}{120}$ et $\frac{\pi^4}{64}$, et limites summae quadratorum $m_1^2+m_2^2+m_3^2$ sunt

$$28. \quad m_1^2+m_2^2+m_3^2 > \frac{p^3}{180}, \quad m_1^2+m_2^2+m_3^2 < \frac{p^3}{96}.$$

Hinc facile deducuntur limites, quos maximus numerorum m_1, m_2, m_3, quem m_1 esse accipimus, excedere nequit. Est enim $m_1+m_2+m_3=0$, itaque $m_1^2+m_2^2+m_3^2 = 2(m_1^2+m_1m_2+m_2^2)$; porro m_2 habet signum contrarium signo numeri m_1, qua re m_1m_2 est negativum; nec non est $m_1m_2+m_2^2 = -m_2m_3$ quantitas negativa, unde sequitur ut sit $m_1^2+m_2^2+m_3^2 < 2m_1^2$; valorem autem minimum formula $m_1^2+m_1m_2+m_2^2$ obtinet pro $m_2 = -\frac{1}{2}m_1$, unde habemus $m_1^2+m_2^2+m_3^2 > \frac{3}{2}m_1^2$. Quibus cum formulis (28.) comparatis, est

$$2m_1^2 > \frac{p^3}{180} \quad \text{et} \quad \tfrac{3}{2}m_1^2 < \frac{p^3}{96},$$

$$\pm m_1 > \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad \pm m_1 < \frac{p\sqrt{p}}{12}.$$

§. 6.

Series A, B, C hoc proprium habent, ut aequationis cubicae radices sint, cujus coëfficientes, si radices A, B et C per $\frac{p^2}{\pi^2}$ multiplicatae accipiuntur, omnes sunt numeri integri. Formam autem simplicissimam haec aequatio habet, si quantitates

$$\frac{p^2}{\pi^2}A-\frac{p^2-1}{24}=\xi_1, \quad \frac{p^2}{\pi^2}B-\frac{p^2-1}{24}=\xi_2, \quad \frac{p^2}{\pi^2}C-\frac{p^2-1}{24}=\xi_3$$

pro radicibus accipiuntur, quarum summa est nihilo aequalis. Aequationem

quaesitam ex formula (20.) deducemus, lemmatis hujus facile demonstrandi auxilio:

Si a, b, c quantitates quascunque designant, quarum summa est nihilo aequalis, et h est radix imaginaria aequationis $h^3 = 1$, est

$$(a+h^2b+hc)^3 = \tfrac{1}{2}\cdot 27abc + \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{-3}(a-b)(b-c)(c-a),$$
$$(a+h^2b+hc)(a+hb+h^2c) = -3(ab+bc+ca).$$

Formula (20.), si loco quantitatum A, B et C novae ξ_1, ξ_2 et ξ_3 introducuntur, hanc formam accipit:

$$3p(m_1+h^2m_2+hm_3) = (z_1+h^2z_2+hz_3)(\xi_1+h\xi_2+h^2\xi_3),$$

et utraque parte per $(z_1+hz_2+h^2z_3)$ multiplicata, fit

$$29.\quad (z_1+hz_2+h^2z_3)(m_1+h^2m_2+hm_3) = 3(\xi_1+h\xi_2+h^2\xi_3).$$

Mutato h in h^2, unde h^2 mutatur in $h^4 = h$, haec aequatio cum priori multiplicata dat

$$30.\quad p(m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1) = \xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1.$$

Porro per lemma supra propositum est

$$(m_1+h^2m_2+hm_3)^3 = \tfrac{1}{2}\cdot 27m_1m_2m_3 + \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{-3}(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1),$$
$$(\xi_1+h\xi_2+h^2\xi_3)^3 = \tfrac{1}{2}\cdot 27\xi_1\xi_2\xi_3 - \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{-3}(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1),$$
$$(z_1+hz_2+h^2z_3)^3 = \tfrac{1}{2}\cdot 27p(t-3u\sqrt{-3}),$$

unde aequationis (29.) utraque parte ad tertiam potestatem elevata, efficitur

$$\tfrac{1}{2}p(t-3u\sqrt{-3})(\tfrac{1}{2}\cdot 27m_1m_2m_3 + \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{-3}(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1))$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 27\xi_1\xi_2\xi_3 - \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{-3}(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1);$$

quae aequatio, partibus realibus et imaginariis separatis, in has duas dilabitur:

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \tfrac{1}{2}p(tm_1m_2m_3 + u(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)),$$
$$(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1) = \tfrac{1}{2}p(27um_1m_2m_3 - t(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)).$$

Quantitatibus $\xi_1+\xi_2+\xi_3$, $\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1$, $\xi_1\xi_2\xi_3$ inventis, statim formatur aequatio cubica

$$31.\quad x^3 + p(m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1)x - \tfrac{1}{2}p(tm_1m_2m_3 + u(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)) = 0,$$

cujus radices sunt $x = \frac{p^2}{\pi^2}A - \frac{p^2-1}{24}$, $x = \frac{p^2}{\pi^2}B - \frac{p^2-1}{24}$, $x = \frac{p^2}{\pi^2}C - \frac{p^2-1}{24}$.

Per formulam generalem (17.) serierum infinitarum A, B et C summae notatu dignae iuveniuntur, statuendo

$$\varphi(v) = \cos 8v + 2\cos 16v + 3\cos 24v + \ldots + \tfrac{1}{2}(p-1)\cdot\cos 4(p-1)v,$$

cujus seriei summa est

$$\varphi(v) = \frac{p+1}{4}\cdot\frac{\sin 4pv}{\sin 4v} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin 2(p+1)v}{\sin 4v}\right)^2.$$

quae, posito $v = \frac{2\varkappa\pi}{p}$, dat

$$\varphi\left(\frac{2\varkappa\pi}{p}\right) = -\tfrac{1}{8}\sec^2\frac{4\varkappa\pi}{p},$$

quibus in formula (17.) substitutis, habemus

$$-\tfrac{3}{4}\Sigma\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)^2\sec^2\frac{4\varkappa\pi}{p}$$
$$= (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right)\cdot 2 + \left(\frac{3}{p}\right)\cdot 3 + \ldots + \left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)}{p}\right)\tfrac{1}{2}(p-1)\right);$$

sejunctis casibus, quibus $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = 1\cdot\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = h$ et $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = h^2$, haec formula hoc modo repraesentari potest:

$$-\tfrac{3}{4}\left(\Sigma\sec^2\frac{4\varkappa\pi}{p} + h^2\Sigma\sec^2\frac{4\varkappa\pi}{p} + h\Sigma\sec^2\frac{4\varkappa\pi}{p}\right)$$
$$= (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)(\Sigma\alpha + h\Sigma\beta + h^2\Sigma\gamma).$$

Substituto valore formulae $\Sigma\alpha + h\Sigma\beta + h^2\Sigma\gamma$, quem aequatio (19.) praebet, in qua h mutandum est cum h^2, haec formula transit in hanc:

$$\Sigma\sec^2\frac{4\alpha\pi}{p} + h^2\Sigma\sec^2\frac{4\beta\pi}{p} + h\Sigma\sec^2\frac{4\gamma\pi}{p} = \frac{4p^2}{\pi^2}(A + h^2 B + hC),$$

quae, conjuncta cum aequatione facile demonstranda

$$\Sigma\sec^2\frac{4\alpha\pi}{p} + \Sigma\sec^2\frac{4\beta\pi}{p} + \Sigma\sec^2\frac{4\gamma\pi}{p} = \frac{4p^2}{\pi^2}(A + B + C),$$

in has aequationes simplices dilabitur:

32. $$A = \frac{\pi^2}{4p^2}\Sigma\sec^2\frac{4\alpha\pi}{p},\quad B = \frac{\pi^2}{4p^2}\Sigma\sec^2\frac{4\beta\pi}{p},\quad C = \frac{\pi^2}{4p^2}\Sigma\sec^2\frac{4\gamma\pi}{p}.$$

§. 7.

Summae numerorum α, β, γ, qui minores sunt quam $\frac{1}{2}p$, scilicet $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$, si numerus p magnus est, non sine multo labore computantur; singulae enim $\frac{1}{2}(p-1)$ terminis constant. Hic autem per applicationem singularem methodi generalis in §. 3. expositae, formulas simplices inveniemus, quibus hae summae ad similes summas reducuntur, qui eos tantum numeros α, β et γ continent, qui sunt minores quam $\frac{1}{4}p$, qua re hic labor dimidio minuitur. Ad hunc finem adhibemus seriem infinitam

$$\varphi(v) = \cos v + \frac{\cos 2v}{2^2} + \frac{\cos 3v}{3^2} + \frac{\cos 5v}{5^2} + \frac{\cos 6v}{6^2} + \ldots,$$

in qua omnes termini desunt, quorum denominatores sunt multipla numeri 4.

Cujus seriei summa est:

$$\varphi(v) = \frac{-3\pi v}{8} + \frac{5\pi^2}{32}, \text{ si } v \text{ est intra limites } 0 \text{ et } \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\varphi(v) = \frac{-\pi v}{8} + \frac{\pi^2}{32}, \text{ si } v \text{ est intra limites } \tfrac{1}{2}\pi \text{ et } \pi;$$

est igitur

$$\varphi\left(\frac{2\varkappa\pi}{p}\right) = \frac{-3\pi^2\varkappa}{4} + \frac{5\pi^2}{32}, \text{ si } \varkappa \text{ est intra limites } 0 \text{ et } \tfrac{1}{4}p,$$

$$\varphi\left(\frac{2\varkappa\pi}{p}\right) = \frac{-\pi^2\varkappa}{4} + \frac{\pi^2}{32}, \text{ si } \varkappa \text{ est intra limites } \tfrac{1}{4}p \text{ et } \tfrac{1}{2}p,$$

quibus in formula generali (17.) substitutis, habemus

$$33. \quad 6\pi^2\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2\left(\frac{-3\varkappa}{4p} + \frac{5}{32}\right) + 6\pi^2\Sigma\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2\left(\frac{-\varkappa}{4p} + \frac{1}{32}\right) +$$

$$= (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2^2} + \left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^2} + \ldots\right),$$

in qua formula signum summae alterum ad omnes numeros integros $\varkappa$ extendendum est, qui intra limites 0 et $\frac{1}{4}p$, alterum autem ad eos qui intra limites $\frac{1}{4}p$ et $\frac{1}{2}p$ jacent. Altera pars hujus aequationis facile in hanc formam redigitur:

$$(z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\left(1 + \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{3}{p}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{5}{p}\right)\frac{1}{5^2} + \left(\frac{7}{p}\right)\frac{1}{7^2} + \ldots\right),$$

quae per formulam (18.) transformatur in hanc:

$$-\frac{3\pi^2}{p}\left(1 + \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{4}\right)(\Sigma\alpha + h^2\Sigma\beta + h\Sigma\gamma).$$

Etiam in altera parte formulae (33.) sejungendi sunt valores literae $\varkappa$, pro quibus $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = h$ et $\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = h^2$. Quem in finem per characterem $\Sigma_1\alpha$ designamus summam eorum numerorum α, qui sunt minores quam $\frac{1}{4}p$, et per $\Sigma_2\alpha$ summam eorum, qui intra limites $\frac{1}{4}p$ et $\frac{1}{2}p$ reperiuntur, unde etiam signorum $\Sigma_1\beta$, $\Sigma_2\beta$, $\Sigma_1\gamma$ et $\Sigma_2\gamma$ vis perspicua est. Praeterea sit λ numerus terminornm summae $\Sigma_1\alpha$, λ_1 numerus terminorum summae $\Sigma_2\alpha$, et eodem modo sint μ et μ_1, ν et ν_1 numeri terminorum quos summae $\Sigma_1\beta$ et $\Sigma_2\beta$, $\Sigma_1\gamma$ et $\Sigma_2\gamma$ habent. Quibus positis formula (33.) hanc formam accipit:

$$\left(-\tfrac{3}{2}\Sigma_1\alpha + \frac{5\lambda p}{16} - \tfrac{1}{2}\Sigma_2\alpha + \frac{\lambda_1 p}{16}\right) + h^2\left(-\tfrac{3}{2}\Sigma_1\beta + \frac{5\mu p}{16} - \tfrac{1}{2}\Sigma_2\beta + \frac{\mu_1 p}{16}\right)$$

$$+ h\left(-\tfrac{3}{2}\Sigma_1\gamma + \frac{5\nu p}{16} - \tfrac{1}{2}\Sigma_2\gamma + \frac{\nu_1 p}{16}\right) = -\left(1 + \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{4}\right)(\Sigma\alpha + h^2\Sigma\beta + h\Sigma\gamma).$$

Haec formula multo simplicior redditur per aequationes

$$\Sigma_1\alpha + \Sigma_2\alpha = \Sigma\alpha, \quad \Sigma_1\beta + \Sigma_2\beta = \Sigma\beta, \quad \Sigma_1\gamma + \Sigma_2\gamma = \Sigma\gamma,$$

$$\lambda + \lambda_1 = \tfrac{1}{6}(p-1), \quad \mu + \mu_1 = \tfrac{1}{6}(p-1), \quad \nu + \nu_1 = \tfrac{1}{6}(p-1),$$

quorum auxilio fit:

$$(4\Sigma_1\alpha - p\lambda) + h^2(4\Sigma_1\beta - p\mu) + h(4\Sigma_1\gamma - p\nu) = \left(2+\left(\frac{2}{p}\right)\right)(\Sigma\alpha + h^2\Sigma\beta + h\Sigma\gamma).$$

Haec aequatio, unitatis radicem cubicam imaginariam h involvens, duas aequationes reales continet, quae cum aequatione $\Sigma\alpha + \Sigma\beta + \Sigma\gamma = \frac{1}{8}(p^2-1)$ conjunctae ad determinandas singulas quantitates $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$ et $\Sigma\gamma$ sufficiunt. In hac re tres casus distinguendi sunt: primus quo $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, secundus quo $\left(\frac{2}{p}\right) = h$ et tertius quo $\left(\frac{2}{p}\right) = h^2$, pro quibus singulis calculi indicati sine ulla difficultate perficiuntur, quibus igitur perscribendis supersedebimus. Summae autem hae sunt:

I. Si $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, sive si 2 est residuum cubicum:

$$\begin{aligned} 3\Sigma\alpha &= 4\Sigma_1\alpha - p\lambda + \tfrac{1}{6}p(p-1), \\ 3\Sigma\beta &= 4\Sigma_1\beta - p\mu + \tfrac{1}{6}p(p-1), \\ 3\Sigma\gamma &= 4\Sigma_1\gamma - p\nu + \tfrac{1}{6}p(p-1). \end{aligned}$$

II. Si $\left(\frac{2}{p}\right) = h$, sive si 2 in serie numerorm β reperitur:

$$\begin{aligned} 3\Sigma\alpha &= 4\Sigma_1\alpha - 4\Sigma_1\beta - p\lambda + p\mu + \tfrac{1}{8}(p^2-1), \\ 3\Sigma\beta &= 4\Sigma_1\beta - 4\Sigma_1\gamma - p\mu + p\nu + \tfrac{1}{8}(p^2-1), \\ 3\Sigma\gamma &= 4\Sigma_1\gamma - 4\Sigma_1\alpha - p\nu + p\lambda + \tfrac{1}{8}(p^2-1). \end{aligned}$$

III. Si $\left(\frac{2}{p}\right) = h^2$, sive si 2 in serie numerorum γ reperitur:

$$\begin{aligned} 3\Sigma\alpha &= 4\Sigma_1\alpha - 4\Sigma_1\gamma - p\lambda + p\nu + \tfrac{1}{8}(p^2-1), \\ 3\Sigma\beta &= 4\Sigma_1\beta - 4\Sigma_1\alpha - p\mu + p\lambda + \tfrac{1}{8}(p^2-1), \\ 3\Sigma\gamma &= 4\Sigma_1\gamma - 4\Sigma_1\beta - p\nu + p\mu + \tfrac{1}{8}(p^2-1). \end{aligned}$$

Eaedem formulae etiam per methodos directas, in doctrina numerorum usitatas, demonstrari possunt, sed hic earum deductionem methodo analytica tradere placuit, qua primum a nobis inventae sunt. Hae autem disquisitiones, quas de residuis cubicis instituimus, tanquam specimina sufficiant.

32.

Développement d'une formule qui donne en même temps les nombres de Bernoulli et les coëfficients de la série qui exprime la sécante.

(Par Mr. *O. Schlömilch*, prof. à l'université de Jena.)

Dans le 4me tome de ce journal, Mr. *Scherk* a démontré une formule qui donne immédiatement les coëfficients B_0, B_2, B_4 etc. de la série

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{B_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots.$$

et ceux B_1, B_3, B_5 etc. de la série

$$\operatorname{tang} x = \frac{2^2(2^2-1)}{1\cdot 2}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}B_3 x^3 + \ldots.$$

Les derniers sont les nombres de ***Bernoulli.*** L'auteur a dévéloppé la dérivée

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)}{\partial x^n},$$

par laquelle on obtient pour $x = 0$ une formule qui donne B_n, quel que soit l'indice. Il tire cette dérivée d'un théorème de ***Laplace*** relatif à la derivée

$$\frac{\partial^n}{\partial h^n}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\},$$

en y supposant y imaginaire.

On peut donner une autre forme à ce calcul, en fesant usage de la formule générale

$$1.\quad \frac{\partial^n f(e^x)}{\partial x^n} = \frac{1}{1}\overset{n}{K}_1 e^x f'(e^x) + \frac{1}{1\cdot 2}\overset{n}{K}_2 e^{2x} f''(e^x) + \ldots. + \frac{1}{1\cdot 2\ldots. n}\overset{n}{K}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x),$$

dont les coëfficients K_1, K_2 etc. sont déterminés par l'équation

$$2.\quad \overset{n}{K}_p = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + \ldots.,$$

p_1, p_2, etc. étant les coëfficients du binôme.

Nous partirons ici de la formule connue

$$3.\quad \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x) = \sec x + \operatorname{tang} x$$
$$= B_0 + \frac{B_2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{B_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{B_6}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6}x^6 + \ldots.$$
$$+ \frac{2^2(2^2-1)}{1\cdot 2}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}B_3 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6}B_5 x^5 + \ldots.$$

En observant que l'on a aussi

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x) = \frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}x} = \frac{\cos\frac{1}{2}x+\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x-\sin\frac{1}{2}x},$$

on obtient, en remplacant x par $x\sqrt{-1}$,

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\sqrt{-1}) = \frac{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}+(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x})\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}-(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x})\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{e^x+1+(e^x-1)\sqrt{-1}}{e^x+1-(e^x-1)\sqrt{-1}} = \frac{(1+\sqrt{-1})e^x+1-\sqrt{-1}}{(1-\sqrt{-1})e^x+1+\sqrt{-1}},$$

et par conséquent en vertu de N°. (3):

$$4.\quad \frac{(1+\sqrt{-1})e^x+1-\sqrt{-1}}{(1-\sqrt{-1})e^x+1+\sqrt{-1}} = B_0 - \frac{B_2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{B_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \ldots.$$
$$+\sqrt{-1}\left\{\frac{2^2(2^2-1)}{1\cdot 2}B_1 x - \frac{2^4(2^4-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}B_3 x^3 + \ldots.\right\}.$$

D'un autre côté on a suivant le théorème de *Mac-Laurin:*

$$5.\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots.$$

tant que cette série est convergente, et si l'on suppose

$$6.\quad fx = \frac{(1+\sqrt{-1})e^x+1-\sqrt{-1}}{(1-\sqrt{-1})e^x+1+\sqrt{-1}},$$

on obtient, en comparant les équations (4 et 5):

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{B_n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n},\ \text{si } n \text{ est pair},$$
$$\frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}B_n\sqrt{-1},\ \text{si } n \text{ est impair};$$

ou bien

7. $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}n}B_n$ pour des valeurs paires de n, et

8. $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cdot\frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1}B_n\sqrt{-1}$ pour des valeurs impaires de n.

Or à l'aide de la formule (1) il est facile de trouver la dérivée à gauche. En effet, en supposant plus généralement:

$$f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\beta z+\alpha} = \frac{1}{\beta}\left\{\alpha+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta z+\alpha}\right\},$$

on aura

$$f^{(p)}(z) = (-1)^p\, 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta(\beta z+\alpha)}\left(\frac{\beta}{\beta z+\alpha}\right)^p \text{ et}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p}f^{(p)}(e^x) = \frac{(-1)^p}{\beta}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta e^x+\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta e^x+\alpha}\right)^p.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\alpha e^x+\beta}{\beta e^x+\alpha}\right)$$

$$= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta(\beta e^x+\alpha}\left\{\overset{n}{K}_1\left(\frac{\beta e^x}{\beta e^x+\alpha}\right)-\overset{n}{K}_2\left(\frac{\beta e^x}{\beta e^x+\alpha}\right)^2+\overset{n}{K}_3\left(\frac{\beta e^x}{\beta e^x+\alpha}\right)^3-\ldots.\right\},$$

et en posant maintenant $x=0$, on trouve que

$$9.\quad f(x) = \frac{\alpha e^x+\beta}{\beta e^x+\alpha}$$

donne

$$10.\quad f^{(n)}(0) = \frac{\alpha-\beta}{\beta}\left\{\overset{n}{K}_1\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)-\overset{n}{K}_2\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+\overset{n}{K}_3\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^3-\ldots.\right\}.$$

La valeur de $f(x)$ dans (6) n'est qu'un cas particulier de (9); savoir celui que donnent les valeurs $\alpha = 1+\sqrt{-1}$ et $\beta = 1-\sqrt{-1}$ de α et β. Donc on aura, reduction faite:

$$f^{(n)}(0) = \sqrt{-1}\left\{\overset{n}{K}_1-\overset{n}{K}_2\,\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\overset{n}{K}_3\,\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})^2-\ldots.\right\}.$$

Pour décomposer cette série en parties réelles et imaginaires, il suffit d'observer que $1-\sqrt{-1} = (\cos\frac{1}{4}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{1}{4}\pi)\sqrt{2}$ et d'appliquer à chaque terme le théorème de *Moivre*. Cela donne

$$f^{(n)}(0) = -\frac{1}{(\sqrt{2})}\overset{n}{K}_2\sin\tfrac{1}{4}\pi+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3\sin\tfrac{2}{4}\pi-\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\overset{n}{K}_4\sin\tfrac{3}{4}\pi+\ldots.$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\overset{n}{K}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2\cos\tfrac{1}{4}\pi+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3\cos\tfrac{2}{4}\pi-\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\overset{n}{K}_4\cos\tfrac{3}{4}\pi+\ldots.\right\}.$$

La comparaison de cette équation avec les formules (7 et 8) conduit aux équations suivantes:

$$11.\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2 \sin\tfrac{1}{4}\pi - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3 \sin\tfrac{2}{4}\pi + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\overset{n}{K}_4 \sin\tfrac{3}{4}\pi - \ldots. = (-1)^{\frac{1}{2}n-1} B_n,$$

$$12.\quad \overset{n}{K}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2 \cos\tfrac{1}{4}\pi + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3 \cos\tfrac{2}{4}\pi - \ldots. = 0,$$

} pour n pair;

$$13.\quad \overset{n}{K}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2 \cos\tfrac{1}{4}\pi + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3 \cos\tfrac{2}{4}\pi - \ldots. = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1} B_n,$$

$$14.\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2 \sin\tfrac{1}{4}\pi - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3 \sin\tfrac{2}{4}\pi + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\overset{n}{K}_4 \sin\tfrac{3}{4}\pi - \ldots. = 0,$$

} pour un n impair.

Il est facile aussi de réunir les deux équations (11 et 13) dans une seule. En effet les quantités

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)} B_n \quad \text{et} \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1} B_n$$

peuvent être exprimées toutes les deux en même temps par

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1-\mu)} \frac{2^{\lambda(n+1)+\mu}(2^{\lambda(n+1)+\mu}-1)}{\lambda n+\mu+1} B_n,$$

en prenant les quantités λ et μ telles, que pour des valeurs paires de n:

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mu = 1,$$

et pour des valeurs impaires de n:

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = 0.$$

On satisfera à ces conditions en posant

$$15.\quad \lambda = \tfrac{1}{2}(1-(-1)^n) \quad \text{et} \quad \mu = \tfrac{1}{2}(1-(-1)^{n-1}).$$

Alors les équations (11 et 13) peuvent être exprimées par

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1-\mu)} \frac{2^{\lambda(n+1)+\mu}(2^{\lambda(n+1)+\mu}-1)}{\lambda n+\mu+1} B_n$$

$$= \lambda\left\{\overset{n}{K}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2 \cos\tfrac{1}{4}\pi + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3 \cos\tfrac{2}{4}\pi - \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\overset{n}{K}_4 \cos\tfrac{3}{4}\pi + \ldots.\right\}$$

$$+ \mu\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\overset{n}{K}_2 \sin\tfrac{1}{4}\pi - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\overset{n}{K}_3 \sin\tfrac{2}{4}\pi + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\overset{n}{K}_4 \sin\tfrac{3}{4}\pi - \ldots.\right\},$$

ou bien par

$$16. \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1-\mu)} \frac{2^{\lambda(n+1)+\mu}(2^{\lambda(n+1)+\mu}-1)}{\lambda n+\mu+1} B_n$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r-1} K_r^n \frac{\lambda \cos \frac{1}{4}((r-1)\pi) - \mu \sin \frac{1}{4}((r-1)\pi)}{\frac{1}{2}(r-1)}.$$

Voilà la formule dont nous nous sommes proposé le développement.

Jena, mai 1846.

Crelle Journal d. Math. Bd. XXXII. Heft 1.

Fac-simile einer Hands

De Potzdam

Je vous rends mille graces
vous avés eue de me donner vo
que de le parcourir en attendan

Quant à la question que vou
au Roy ou non, je crois que
d'en user comme il vous pla
de part ni d'autre. Quand m
livre, il ne sçauroit être offe
enfariés.

J'ay l'honneur d'être tres pa

Je presente mes tres humbles r
a Madame de Premontval.

dschrift von Maupertuis

n 18 Aout

Fac-simile einer Hand

ndschrift von W. J. G. Karsten.

3. Karstens
Entwurf
schichte von ihm selbst
der Churfürstlichen
rmbge des n. XXXVI.
ze übergeben
hr 1766.

andenburg im
Mecklenburg-
meine Geburts-
st ich im Jahr 1732
mbr. gebohren bin.
r war an diesem
ker, und meine
fallseines Apoth-
er, aus Güstrow
hum Mecklenburg
bürtig. etc: etc:

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXXII. Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Schröter.

Wohlgebohrner Herr Ober-Baucommissär,
Hochgeschätzter, Theuerster Freund!

Daß Ew. Wohlgebohrnen meine Bemerkungen über die Einrichtung der Sternwarte nicht übel gedeutet haben, freuet mich herzlich; und eben so viel schätzbares Vergnügen wird es mir machen, wenn ich für die Erreichung Ihres geäußerten Wunsches in L. mitwirken kann. Daß dafür eine schickliche Gelegenheit abgewartet werden müsse, verstehet sich von selbst; eine solche möchte aber Ihre Baueinrichtung der neuen Sternwarte wohl bald geben.

Ihrem Wunsche gemäß, hat K. Staats-Ministerium mittelst eines an mich erlassenen Rescripts, dem Hln Observator Harding den Auftrag zu genauester Aufneh-

nung der Mittagslinie derselben zu er-
theilen geruhet: Geneigen Sie ja denselben
durch 3 bis 4 schwere, gegen 5 und mehr Fuß
lange Sandsteine zu unterstützen, welche ihrer
Länge nach mit Grant in die Erde, derselben
gleich und recht fest einzurammen seyn dürf-
ten, damit nicht der Neid eine etwanige
heimliche Verrückung der Puncte bewirken
könne. Ueberhaupt dürfte eine Schildwache
während des Baues dem Zweck sehr an-
gemessen und nützlich seyn.

Empfehlen Sie mich der Verehrungswürdig
Frau Gemahlin und der ganzen lieben
Familie bestens, und bleiben Sie mir ge-
wogen. Mit wärmster Hochschätzung bin
ich

Lilienthal
den 19ten März
1803.

der Ihrige
M Schroeter

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXXII. Hef

Fac-simile einer

Celebrem
Godefrido G
Isaacus

Literæ tuæ, cum no
elapsæ inter schedas
Cesternum diem inci
cum amicitiam tuam
hujus sæculi Geomet
quemadmodum etiam
Nam quamvis comme
quammaximè fugiam
amicitia nostra ex s
maxime cum Wal
lucem denuò missurus
olim per manus D
ansam mihi dedit
Postulavit enim ut
rem quam literis
coactus sum qua po
meam fluxionum
Data æquatione qua
te invenire fluxion
nihil scripsisse quod
quod reprehensione
significes quoniam
mathematica.

— — — — —

tari volui me tibi
amicitiam tuam m
Cantabrigiæ, Octob. $\frac{16}{26}$.

Heft 4.

Handschrift von Newton.

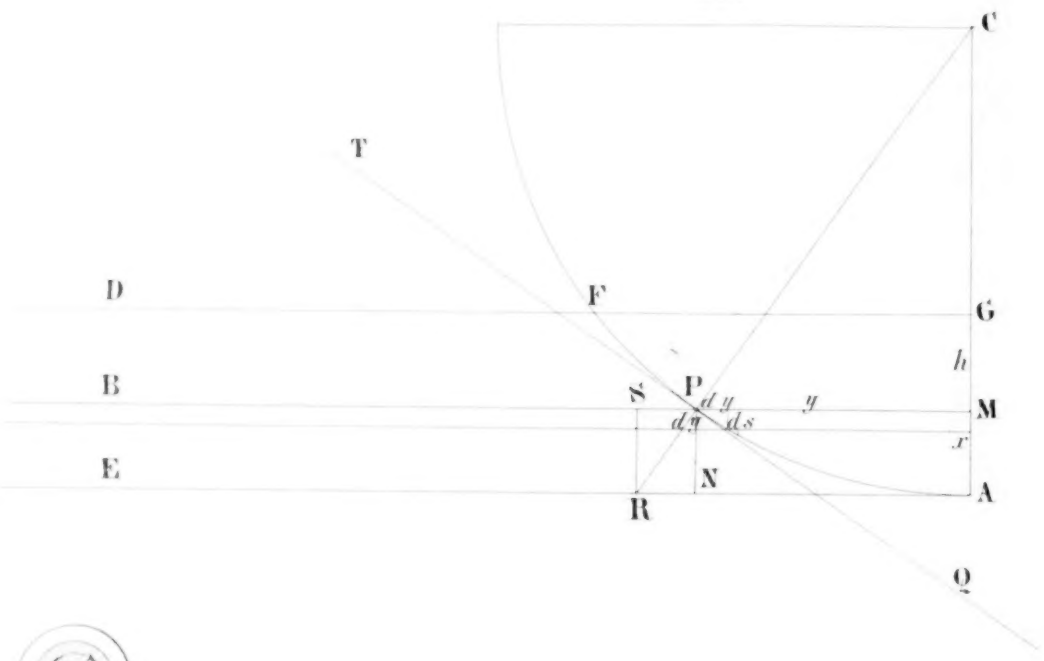
mmo Viro
Gulielmo Leibnitio
Newton S. P. D.

non statim acceptis responderem, e manibus
as meas diu latuere, nec in eas ante
cidere potui Id quod me moleste habuit
m maximi faciam, teqz inter summos
etras a multis retro annis habuerim;
n data omni occasione testatus sim
mercia philosophica & mathematica
m, tamen metuebam ne silentio
silentio decrementum acciperet, idqz
allisius noster Historiam Algebrae in
ns nove aliqua e literis inseruit quae
Dni Oldenburgi ad te conscripsi, & sic
ea etiam de re ad te scribendo,
methodum quandam duplicem ape-
transpositis ibi celaveram. Quocirca
potui brevitate exponere methodum
quam hac celaveram sententia.
antitates quotcunqz fluentes involven
onet, & vice versa. Spero autem me
tibi non placeat, et siquid sit
dignum censeas, ut literis id nobi
amicos pluris facio quam inventa

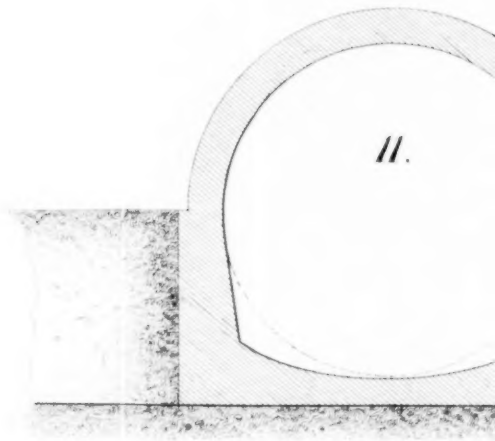
— — — — — — —

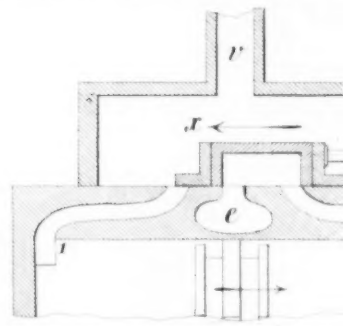
i amicum integerrimum esse &
maximi facere. Vale Dabam
. 1693.

10.

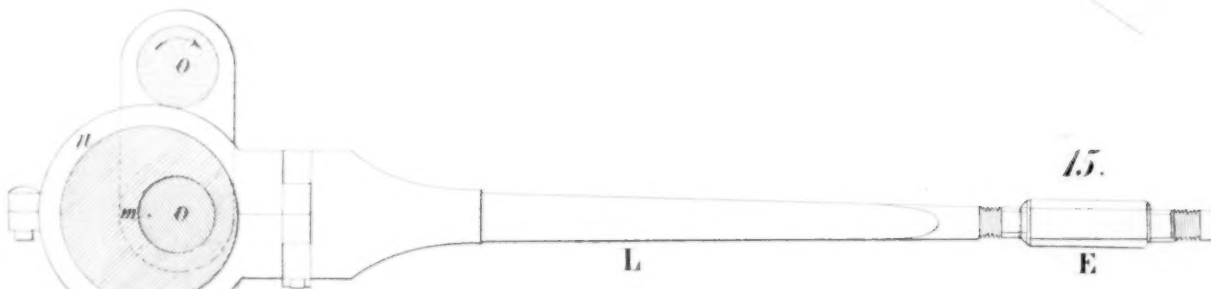


11.

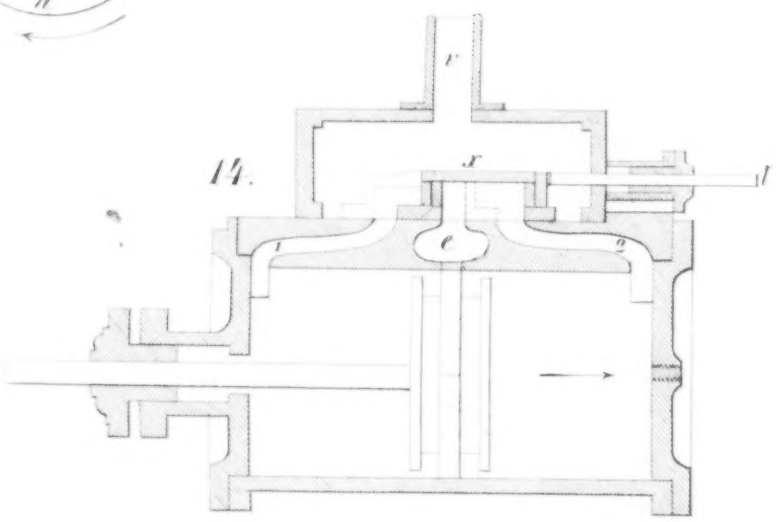




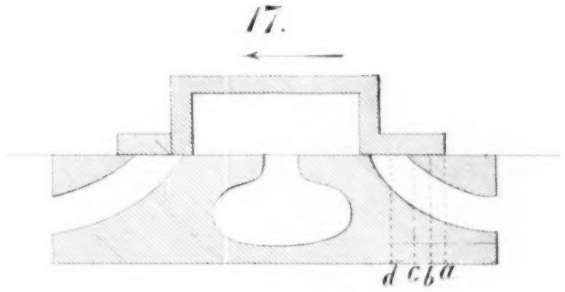
15.

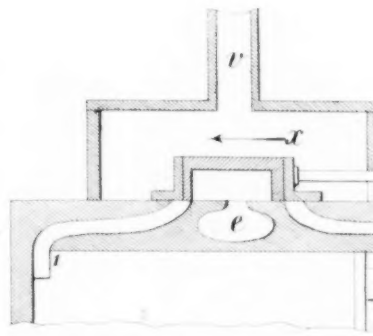


14.

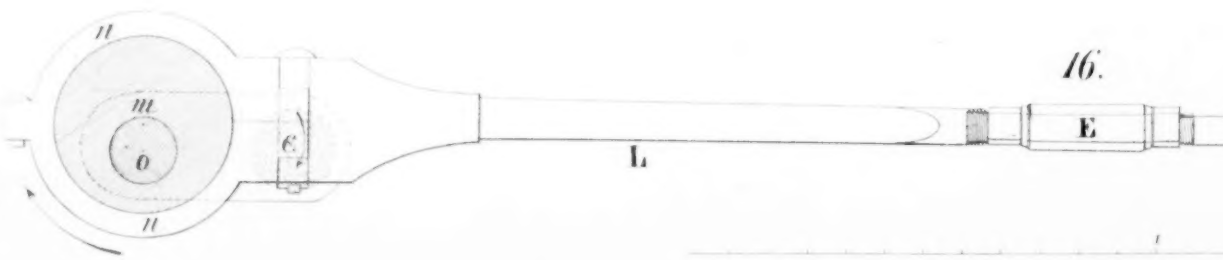


17.





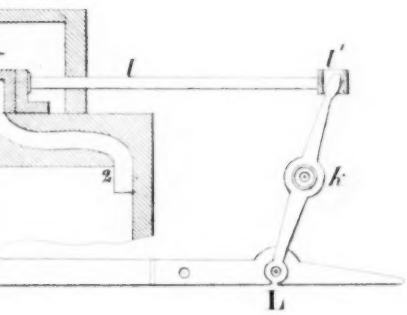
16.

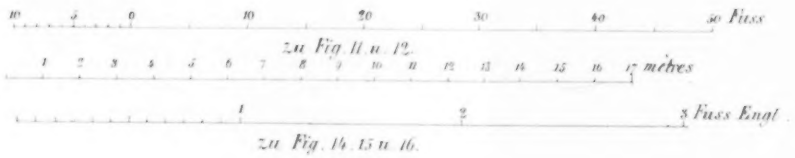


1 2 Fuss Engl.

zu Fig. 17.

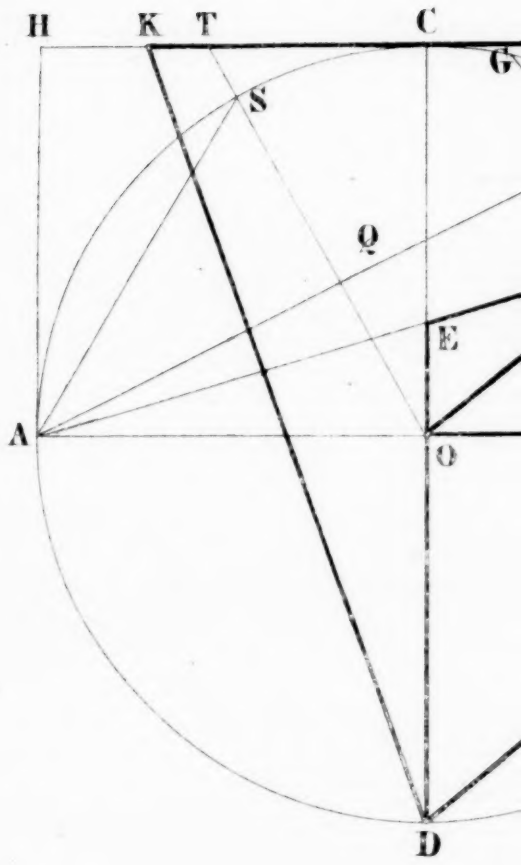
12.



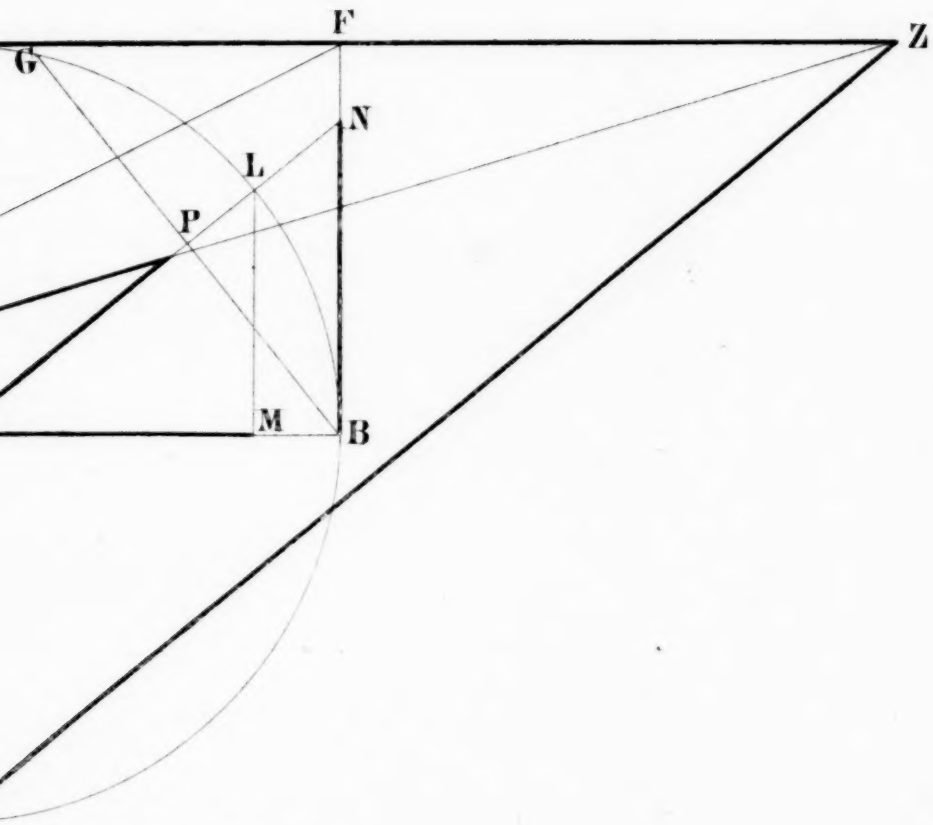


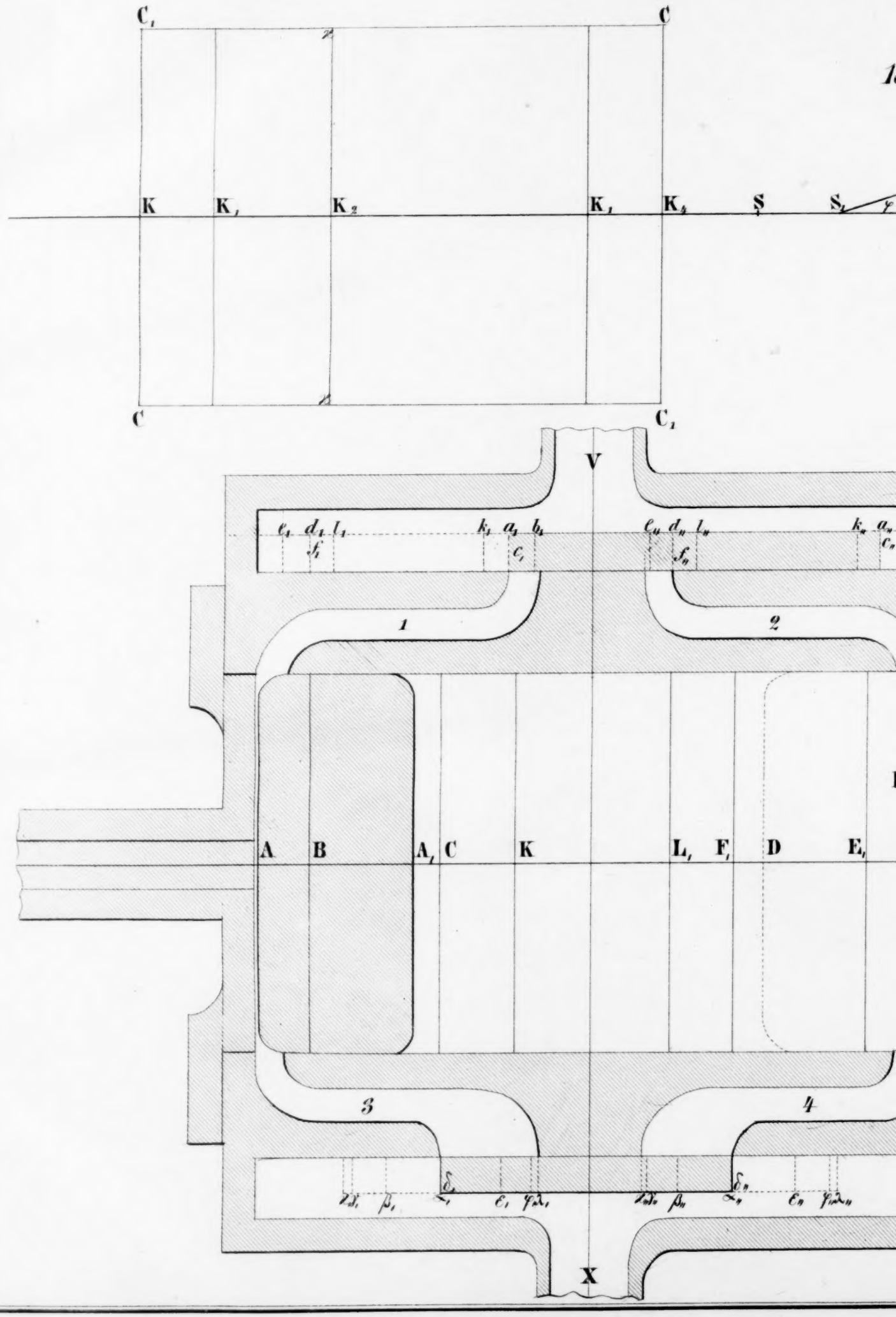
zu Fig. 14. 15 u. 16.

13.

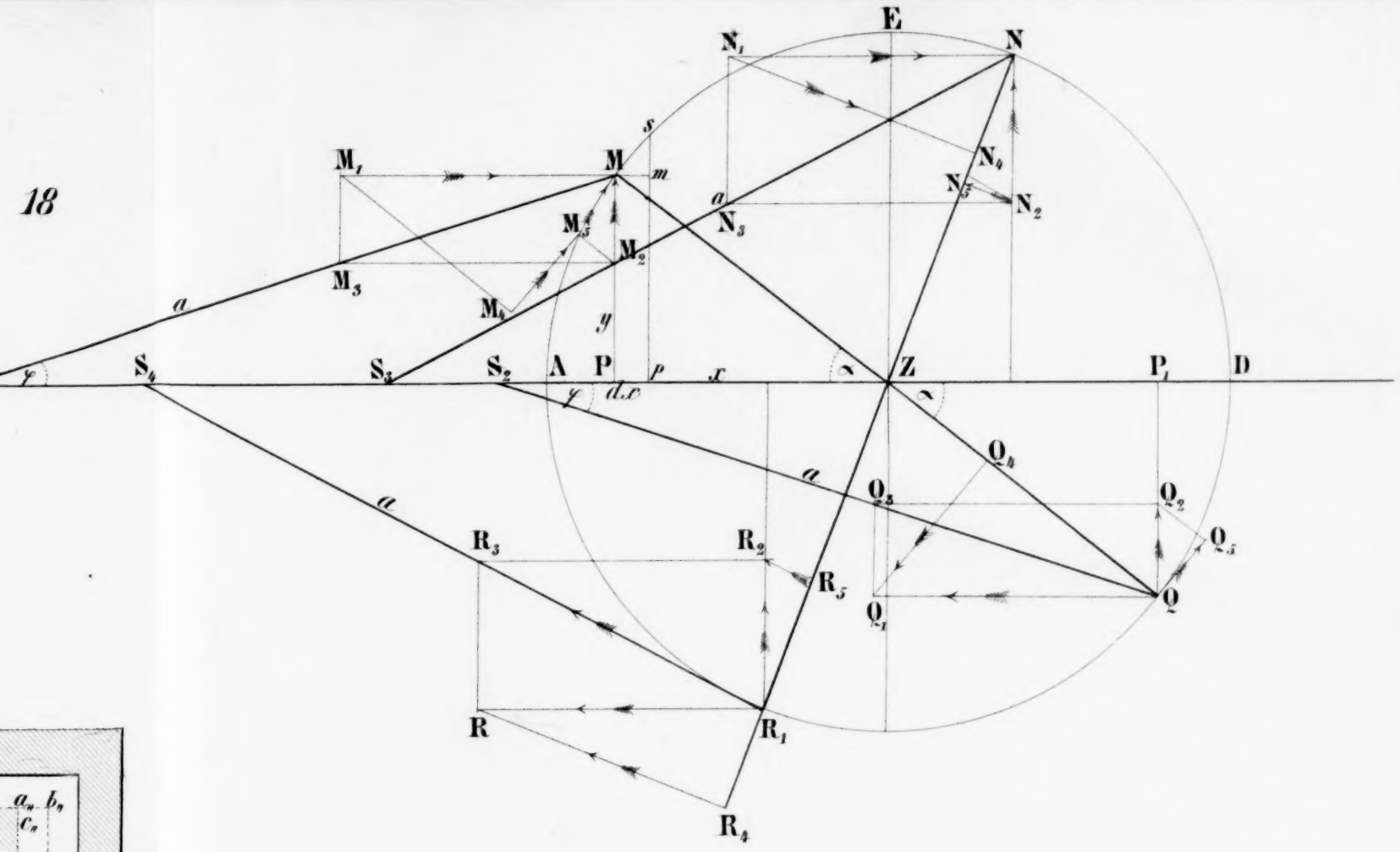

H
K
T
C
G
S
Q
E
A
O
D

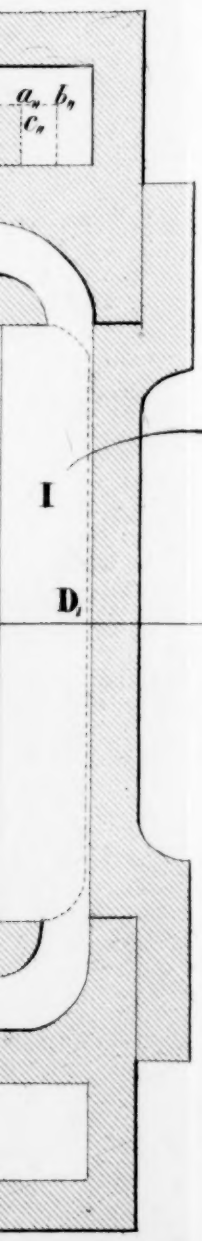
1.



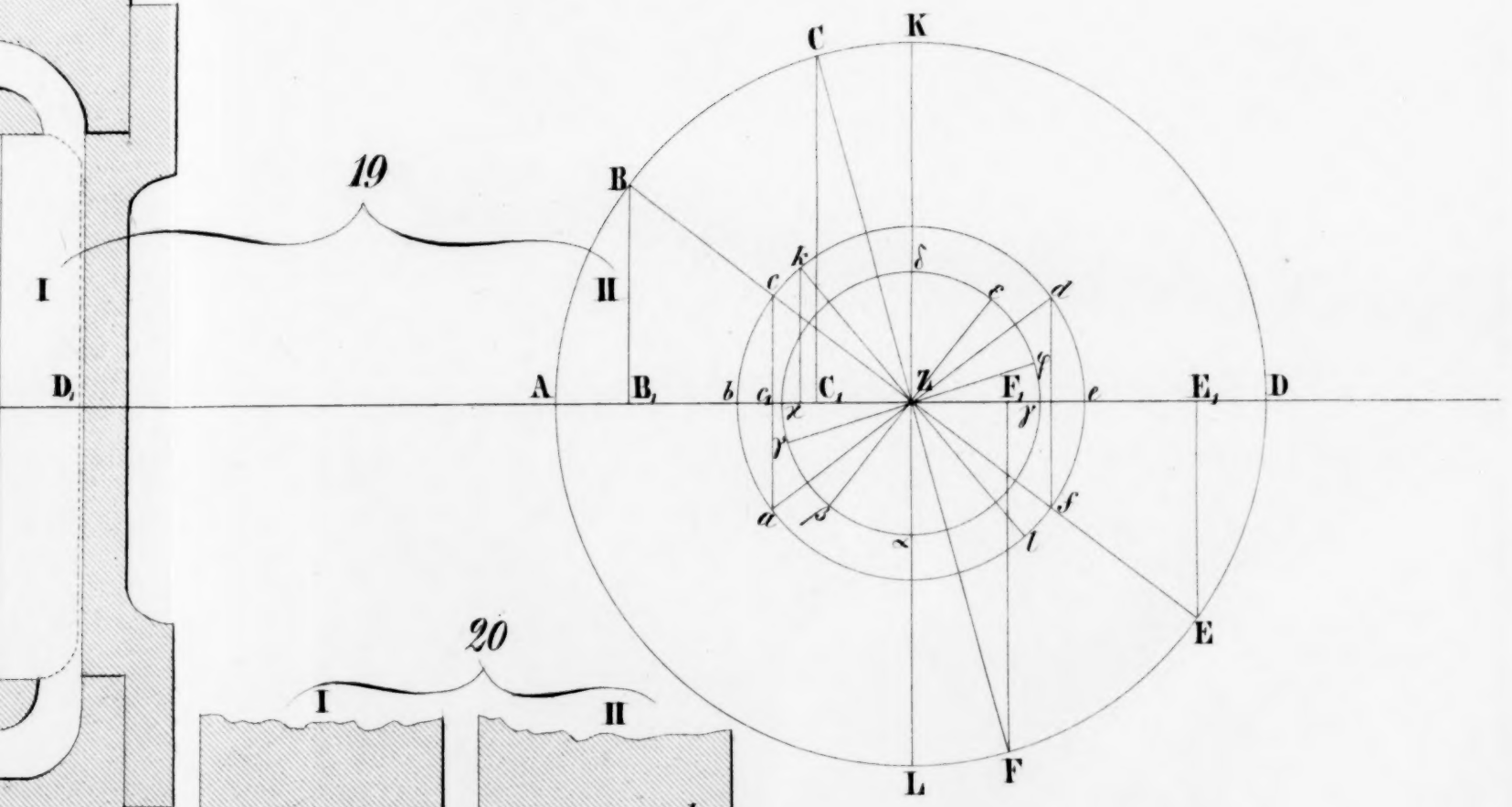

C₁
C
K
K₁
K₂
K₁
K₂
S
S₁
C
C₁
V
1
2
A
B
A₁
C
K
L₁
F₁
D
E₁
3
4
X

18

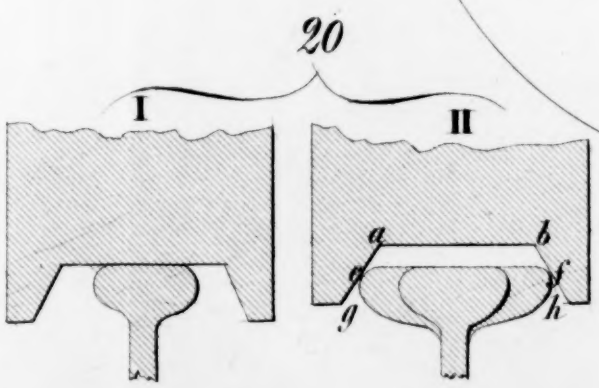




19



20



zu Fig. 19 u. 20.

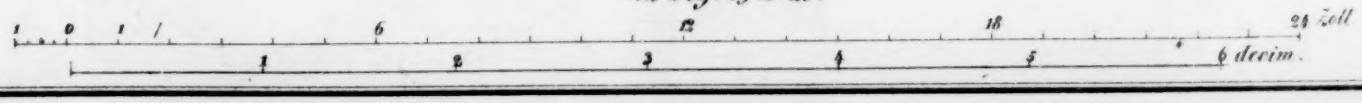
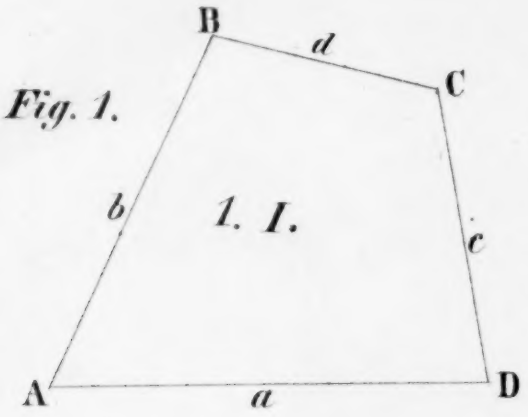
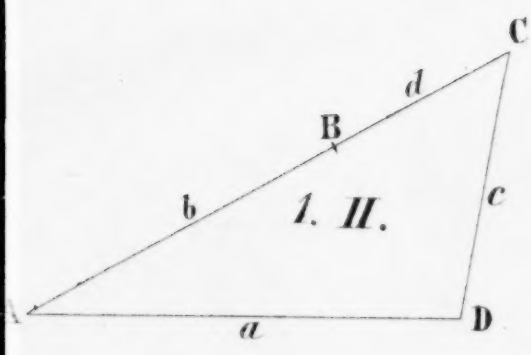
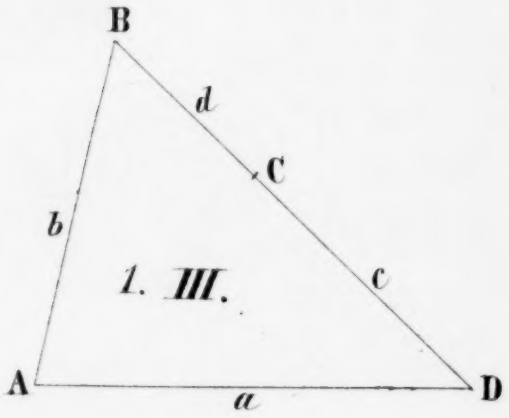
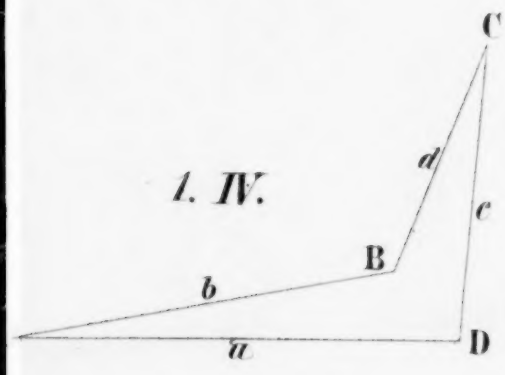


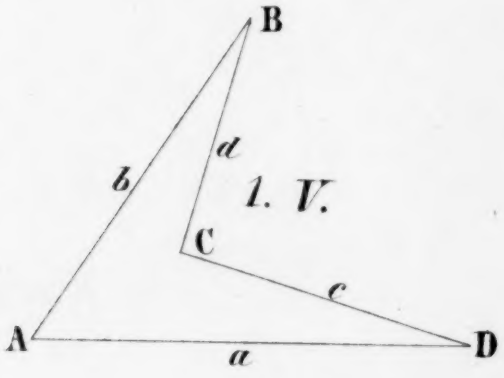
Fig. 1.

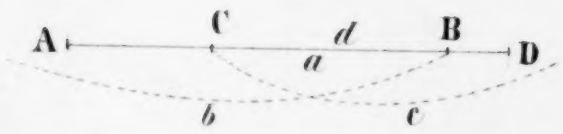

B
d
C
b
1. I.
c
A
a
D

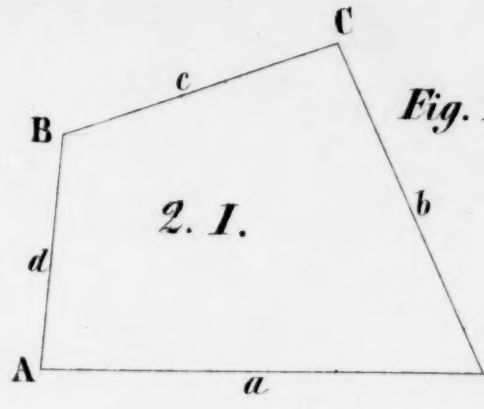

C
d
B
b
1. II.
c
A
a
D

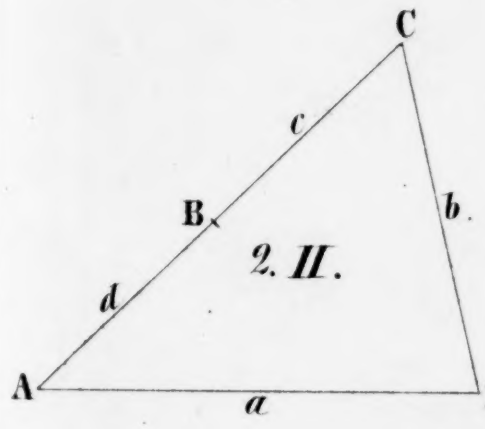

B
d
C
b
1. III.
c
A
a
D

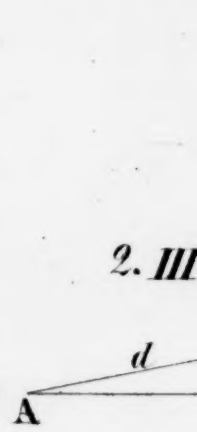

C
1. IV.
d
c
B
b
a
D

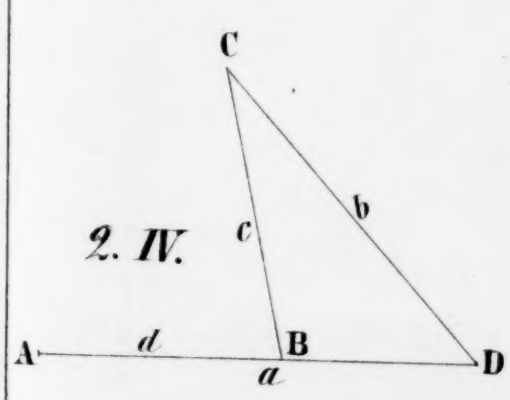

B
b
d
1. V.
C
c
A
a
D

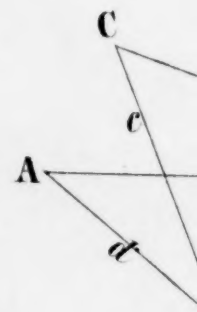

1. VI.
A
C
d
B
D
a
b
c

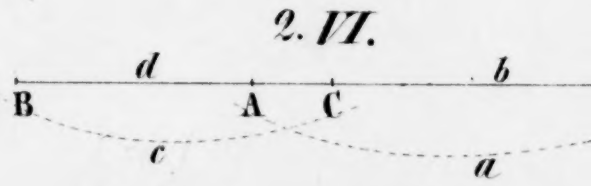

C
c
Fig.
B
2. I.
b
d
A
a

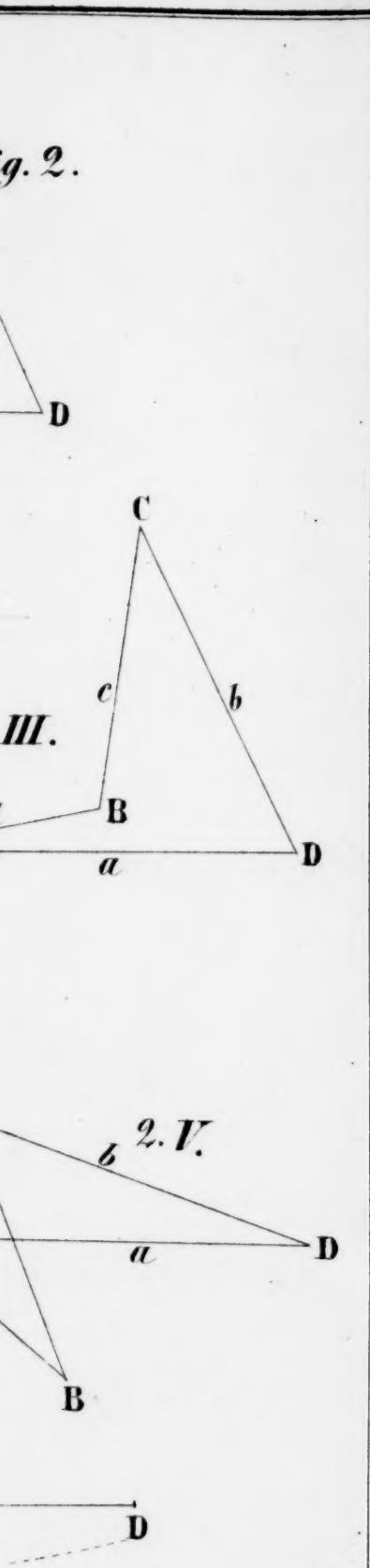

C
c
B
2. II.
b
d
A
a
D


2. III
d
A


C
b
2. IV.
c
A
d
B
a
D


C
c
A
d


2. VI.
d
b
B
A
C
c
a


g. 2.
D
C
c
b
III.
B
a
D
2. V.
b
a
D
B
D

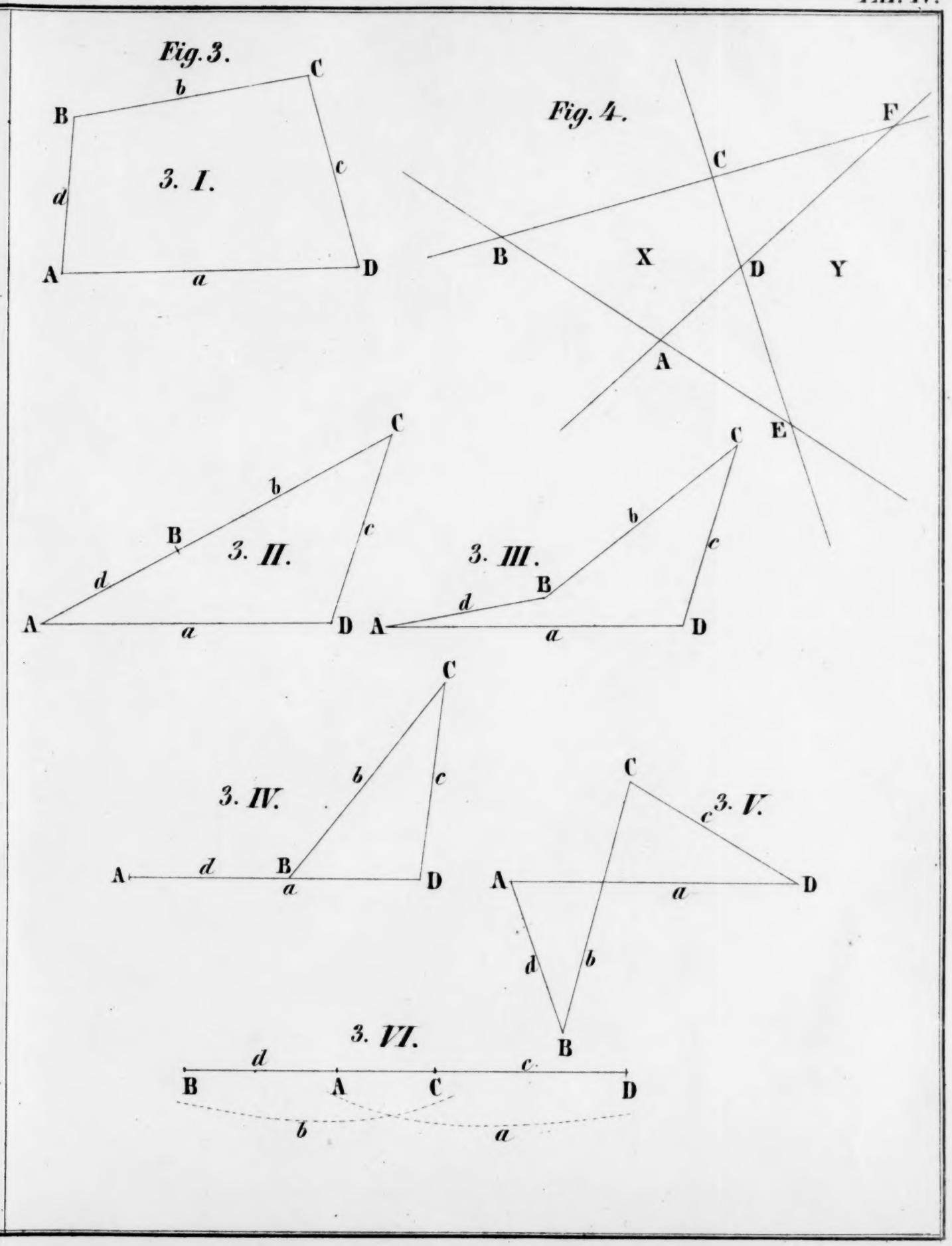


Fig. 3.
C
b
B
c
3. I.
d
A
a
D
Fig. 4.
F
C
B
X
D
Y
A
E
C
b
B
c
3. II.
d
A
a
D
C
b
c
3. III.
B
d
A
a
D
C
b
c
3. IV.
A
d
B
a
D
C
c
3. V.
A
a
D
d
b
B
3. VI.
d
c
B
A
C
D
b
a